EL OSCILADOR ARMÓNICO

Se trata de resolver la E. de S: (unidimensional)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi = 0$$

para $V = \frac{1}{2}kx^2$. Haciendo: $\xi = \alpha x$, con $\alpha^4 = \frac{mk}{\hbar^2}$ se obtiene:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi = 0 \qquad (A)$$

en la que: $\lambda = \frac{2E}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2E}{\hbar\omega}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Ya que $\psi \underset{\xi \to \pm\infty}{\to} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$, se propone: $\psi = H(\xi)e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$.

La función H satisface la ec:

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dH}{d\xi} + (\lambda-1)H = 0$$

Resolviendo por el método de series:

$$H = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi^i$$

se obtiene la condición de recurrencia:

$$\frac{a_{i+2}}{a_i} = \frac{2i+1-\lambda}{(i+1)(i+2)}$$

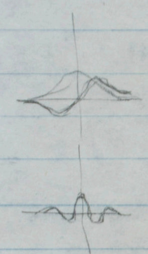
Se puede probar que si la serie es infinita, ψ diverge cuando $\xi \to \pm\infty$. Por lo tanto hay que sea un polinomio. Sea n el grado de éste; entonces:

$H_0 = 1$ $\qquad$ $H_1 = 2\xi$

$H_2 = 4\xi^2 - 2$ $\qquad$ $H_3 = 8\xi^3 - 12\xi$

$H_4 = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12$

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$$



$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2n+1-\lambda}{(n+1)(n+2)} = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = 2n+1. \qquad (B)$$

Las relaciones con los polinomios de Hermite

$$H_n(\xi) = (-)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

(Fórmula de Rodrigues).

De (B) se sigue que:

$$E = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

que da los niveles de energía.

Las funciones de onda son:

$$\psi_n = C_n H_n(\alpha x)\, e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$$

y puede probarse que:

$$C_n = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!}}$$

De la ecuación (A) se encuentra que:

$$\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)\psi_n = 2(n+1)\psi_n$$

$$\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\psi_n = 2n\psi_n$$

Llamando en la 1ª: $\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)\psi_n = \psi_{n+1}$

se obtiene: $\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\psi_n = 2n\psi_{n-1}$

Estas relaciones satisfacen la 2ª ecuación. El operador $\xi - \frac{d}{d\xi}$ aumenta en 1 el valor de n (operador de ascenso) y

$$\alpha^4 = \frac{m^2}{\hbar^2}\omega^2 \qquad \alpha^2 = \frac{m}{\hbar}\omega$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega x + \hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(\alpha^2 x + \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$\psi_1 = a^+\psi_0 = \sqrt{\frac{\alpha^3}{2\sqrt{\pi}}}\left(\alpha^2 x - \frac{d}{dx}\right)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x 2}$$

$$= \sqrt{\frac{2\alpha^3}{\sqrt{\pi}}}\, x\, e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$$

el $\xi + \frac{d}{d\xi}$ disminuye en 1 a n (operador de descenso). Si se supone que $n \geq 0$, de la segunda se obtiene:

$$\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\psi_0 = 0$$

$$\therefore \quad \psi_0 = C e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

La C se determina por normalización y mediante aplicaciones sucesivas del operador de ascenso se obtiene ψ_n. Esto sugiere el siguiente método de solución:

Consideremos el operador hamiltoniano:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 x^2)$$

p y x son hermitianos y satisfacen:

$$[x, p] = i\hbar$$

Definamos los operadores:

$$a = (2m\hbar\omega)^{-1/2}(m\omega x + ip)$$

$$a^+ = (2m\hbar\omega)^{-1/2}(m\omega x - ip)$$

(a^+ es el adjunto de a, lo cual es evidente desde un punto de vista formal). Estos satisfacen las reglas:

$$[a, a] = [a^+, a^+] = 0$$

$$[a, a^+] = 1$$

por lo que podemos escribir:

$$H = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)$$

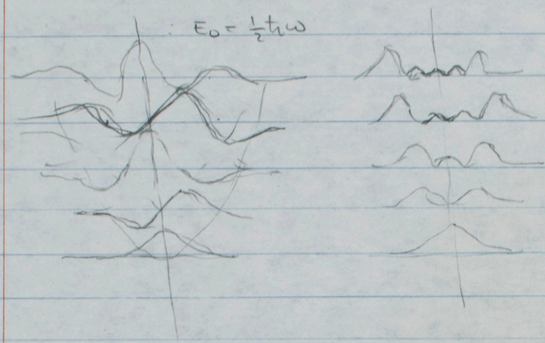
Nótese que: $\quad [a, H] = \hbar\omega a \qquad$ (c)

$$[H, a^+] = \hbar\omega a^+$$

$H\psi_0 = E_0\psi_0$

$\hbar\omega(a^+a+\frac{1}{2})\psi_0 = E_0\psi_0$

$\therefore E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$



Además, H es positivo definido ya que $H=\hbar\omega(|a|^2+\frac{1}{2})$.

Consideremos la función $a\psi$, en donde ψ es una función propia de H con valor propio E, esto es,

$$H\psi = E\psi.$$

De (C) se sigue que:

$$Ha\psi = aH\psi - \hbar\omega a\psi = (E-\hbar\omega)a\psi,$$

esto es, $a\psi$ es función propia de H con valor propio $E-\hbar\omega$. De manera análoga se puede ver que $a^+\psi$ es función propia de H con valor propio $E+\hbar\omega$. Se sigue que los valores de E están igualmente espaciados (distan $\hbar\omega$). Aplicando a a ψ repetidas veces se encuentra que la secuencia debe terminar, ya que H es positivo; por lo tanto existe ψ_0 tal que $a\psi_0=0$. Además ψ_0 es función propia de H con valor propio $E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$. Se sigue que los niveles de energía son:

$$E_n=(n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

Nótese que $N=a^+a$ satisface

$$N\psi_n = n\psi_n$$

y que:
$$\psi_n = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}\psi_0,$$

si $\langle\psi_0,\psi_0\rangle=1$, ya que:

$$\langle\psi_n,\psi_n\rangle = \frac{1}{n}\langle a^+\psi_{n-1}, a^+\psi_{n-1}\rangle = \frac{1}{n}\langle\psi_{n-1}, aa^+\psi_{n-1}\rangle$$
$$= \frac{1}{n}\langle\psi_{n-1},(a^+a+1)\psi_{n-1}\rangle = \langle\psi_{n-1},\psi_{n-1}\rangle = \langle\psi_0,\psi_0\rangle = 1$$

Nótese también que:

$$a\psi_n = \frac{aa^+}{\sqrt{n}}\psi_{n-1} = \frac{a^+a+1}{\sqrt{n}}\psi_{n-1} = \sqrt{n}\,\psi_{n-1}$$

y:

$$a^+\psi_n = \frac{(a^+)^{n+1}}{\sqrt{n!}}\psi_0 = \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}$$

Se sigue que a^+ es el operador de ascenso (creación) y a el de descenso (aniquilamiento). Además:

$$\langle\psi_n,\psi_m\rangle = 0 \quad \text{si } n\neq m$$

ya que

$$\langle\psi_n, N\psi_m\rangle = \langle N\psi_n,\psi_m\rangle$$

$$\therefore\ (m-n)\langle\psi_n,\psi_m\rangle = 0$$

Por lo tanto: $\langle\psi_n,\psi_m\rangle = \delta_{nm}$.

El conjunto de funciones propias de H, $\{\psi_n\}$ forma un conjunto completo (esto es, es una base ortonormal). Se puede entonces escribir, para toda f relacionada con el estudio del oscilador armónico:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\psi_n \qquad \text{con} \quad c_n = \langle\psi_n, f\rangle.$$

De la ecuación: $a\psi_0 = 0$ se sigue que:

$$\left(\frac{d}{dx}+\alpha^2x\right)\psi_0 = 0 \qquad \left(\alpha^2 = \frac{m\omega}{\hbar}\right)$$

cuya solución normalizada es:

$$\psi_0 = \pi^{-1/4}\alpha^{1/2}e^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}$$

(paquete mínimo).

Como $x = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}(a+a^+)$, se puede probar que:

$$x_{nm} = \langle\psi_n, x\psi_m\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{n+1}{2}} & \text{si} \quad m=n+1 \\ \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{n}{2}} & \text{si} \quad m=n-1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

En particular $\langle x\rangle_n = x_{nn} = 0$.

Además:

$$\langle x^2\rangle_n = \langle\psi_n, x^2\psi_n\rangle = \frac{2n+1}{2\alpha^2}$$

Como $p = \frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}}(a^+-a)$

se sigue que:

$$\langle p\rangle_n = \langle\psi_n, p\psi_n\rangle = 0$$

$$\langle p^2\rangle_n = \frac{\hbar^2\alpha^2}{2}(2n+1)$$

Resulta que en el estado base:

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle_0 - \langle x\rangle_0^2 = \frac{1}{2\alpha^2}, \qquad (\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2\alpha^2}{2}$$

$$\therefore\ \Delta x\cdot\Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

en concordancia con que el estado base es un paquete mínimo y la energía de las fluctuaciones es:

$$\Delta E = \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 + \frac{k}{2}(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

Busquemos ahora los valores propios del operador a:

$$a\phi = \lambda\phi$$

Como:

$$|c_n|^2 = \frac{\lambda^{2n}}{n!}|c_0|^2 = \frac{\lambda^{2n}}{n!}e^{-\lambda^2} \qquad (c_n = \langle\psi_n, \phi\rangle)$$

la distribución de edos n en ϕ sigue la dist. de Poisson (con "valor medio" λ^2).

Como: $$\phi = \sum_n c_n\psi_n = \sum_n c_n \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}\psi_0$$

se puede definir la función analítica:

$$f(z) = \sum_n \frac{c_n}{\sqrt{n!}} z^n$$

Con esto se puede expresar $\phi = f(a^+)\psi_0$.

Los estados coherentes se definen extendiendo λ al plano complejo, esto es, son los edos. propios de a con v.p. complejos.

El valor esperado de x es:

$$\langle\phi, x\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\langle\phi, (a+a^+)\phi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\lambda$$

Se sigue que:

$$\left(\frac{d}{dx} + \alpha^2 x\right)\phi = \sqrt{2}\alpha\lambda\phi$$

cuya integral normalizada es:

$$\phi = \pi^{-1/4}\alpha^{1/2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x - \sqrt{2}\lambda)^2} \qquad (D)$$

Por otra parte, como las ψ_n forman una base ortonormal:

$$\phi = \sum_n c_n\psi_n \quad \text{con} \quad c_n = \langle\psi_n, \phi\rangle$$

se sigue que:

$$\langle\psi_n, a\phi\rangle = \sqrt{n+1}\langle\psi_{n+1}, \phi\rangle = \lambda\langle\psi_n, \phi\rangle$$

esto es la condición de recurrencia:

$$c_n = \frac{\lambda}{\sqrt{n}}c_{n-1} = \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}c_0$$

$$\therefore \phi = c_0\sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\psi_n.$$

Exigiendo que $\langle\phi, \phi\rangle = 1$ se obtiene:

$$1 = |c_0|^2\sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\left(\sum_m \frac{\lambda^m}{\sqrt{m!}}\langle\psi_n, \psi_m\rangle\right) = |c_0|^2\sum_n\frac{\lambda^{2n}}{n!} = |c_0|^2 e^{\lambda^2}$$

$$\therefore c_0 = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}$$

o sea: $$\phi = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}\sum_n\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\psi_n = \qquad (E)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}\sum_n\frac{(\lambda a^+)^n}{n!}\psi_0 = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}e^{\lambda a^+}\psi_0$$

Los estados ϕ se llaman coherentes.

Los edos ϕ no son ortonormales ya que:

$$\langle \phi_\lambda, \phi_\mu \rangle = \sum_{nm} C_n(\lambda) C_m(\mu) \langle \psi_n, \psi_m \rangle = \sum_n C_n(\lambda) C_n(\mu)$$

$$= \sum_n \frac{(\lambda\mu)^n}{n!} C_0(\lambda) C_0(\mu) = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\mu^2 + \lambda\mu}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}(\lambda-\mu)^2}$$

Tampoco forman un sistema completo.

Se puede probar que el valor esperado de la posición es $\langle \psi(t), x\,\psi(t) \rangle = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\lambda \cos\omega t$, en concordancia con lo anterior.

Si se considera que:

$$\psi_n = \pi^{-1/4} \alpha^{1/2} (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} H_n(\alpha x)\, e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2},$$

de (D) y (E) se obtiene que:

$$e^{-\frac{1}{2}(\alpha x - \sqrt{2}\lambda)^2} = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} \sum_n \frac{H_n(\alpha x)}{n!} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$$

Llamando: $s = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ y $\xi = \alpha x$ se obtiene la función generatriz:

$$e^{-s^2 + 2s\xi} = \sum_n \frac{H_n(\xi)}{n!} s^n$$

Se puede obtener la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite de la siguiente manera:

Como: $a^+ \psi_n = \sqrt{n+1}\, \psi_{n+1}$ se obtiene:

$$\left(\alpha^2 x - \frac{d}{dx}\right) \psi_n = \alpha \sqrt{2(n+1)}\, \psi_{n+1}$$

Haciendo $V_n = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \psi_n$, $(\xi = \alpha x)$ se obtiene:

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right) \psi_{n-1} = -\frac{1}{\sqrt{2n}} e^{\frac{1}{2}\xi^2} \frac{dV_{n-1}}{d\xi} = e^{\frac{1}{2}\xi^2} V_n$$

$$\therefore V_n = -\frac{1}{\sqrt{2n}} \frac{dV_{n-1}}{d\xi} = (-)^n (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} \frac{d^n V_0}{d\xi^n}$$

Como $V_0 = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \psi_0 = \pi^{-1/4} \alpha^{1/2} e^{-\xi^2}$, resulta:

$$H_n(\xi) = (-)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

Resolvamos ahora la Ec. de S. dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

$$\pi^{-\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(\alpha x-\sqrt{2}\lambda)^2} = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}\sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\psi_n$$

$$\lambda \to \lambda e^{-i\omega t}$$

$$e^{-\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{i}{2}\omega t}\, e^{+\frac{1}{2}(\lambda e^{-i\omega t})^2}\,\pi^{-\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(\alpha x-\sqrt{2}\lambda e^{-i\omega t})^2}$$

$$-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda^2 e^{-2i\omega t}$$

En términos de la base ψ_n:

$$\psi = \sum_n a_n(t)\,\psi_n$$

$$\therefore\ i\hbar\sum_n \frac{da_n(t)}{dt}\psi_n = \sum_n a_n(t)E_n\psi_n$$

o sea: $\dfrac{da_n(t)}{dt}+\dfrac{i}{\hbar}E_n a_n(t)=0 \quad \therefore\ a_n(t)=a_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$

Resulta entonces: $\psi(t)=\sum\limits_n a_n\psi_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$

Supongamos que inicialmente se tiene el paquete (D), esto es:

$$\psi(0)=\phi=\pi^{-1/4}\alpha^{1/2}e^{-\frac{1}{2}(\alpha x-\sqrt{2}\lambda)^2}=\sum_n a_n\psi_n$$

Como: $a_n=\langle\psi_n,\phi\rangle=c_n=\dfrac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}$

resulta:

$$\psi(t)=\sum_n\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}\psi_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}=$$

$$=e^{-\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{i}{2}\omega t}\sum_n\frac{(\lambda e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}\psi_n$$

ya que $E_n=\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$. Comparando con (E) se encuentra que:

$$\psi(t)=e^{-\frac{i}{2}\omega t}\cdot\pi^{-1/4}\alpha^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(\alpha x-\sqrt{2}\lambda e^{-i\omega t})^2-\frac{1}{2}\lambda^2(1-e^{-2i\omega t})}$$

$$=\pi^{-1/4}\alpha^{1/2}e^{-\frac{1}{2}(\alpha x-\sqrt{2}\lambda\cos\omega t)^2-\frac{i}{2}(2\sqrt{2}\lambda\alpha x\sin\omega t-\lambda^2\sin 2\omega t+\omega t)}$$

$$\therefore\ |\psi(t)|^2=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-(\alpha x-\sqrt{2}\lambda\cos\omega t)^2}$$