



Archivo
Luis Estrada

La Materia Nuclear considerada como líquido de Fermi
Léon Van Hove. (Feb. 1958)

I. Introducción e historia del problema.

Nuestros estudios en Física Nuclear nos han revelado que los nucleos pesados contienen, dentro de una superficie mas o menos definida y muy poco conocida hasta el presente, un conjunto de nucleones en un estado de densidad homogénea, al cual llamaremos materia nuclear. El problema de la materia nuclear es, de hecho, un caso particular del problema de los sistemas de muchas partículas en interacción, el cual es uno de los problemas centrales de la Física Teórica contemporánea.

La primera descripción de la materia nuclear fue hecha por N. Bohr (Nature 137, 344, 1936) quien postuló una analogía entre la materia nuclear y la materia ordinaria en el estado líquido. Esta analogía fue utilizada para describir reacciones nucleares, en particular la formación de estados compuestos los cuales se caracterizan por su extraordinariamente larga vida media. El movimiento de un nucleo penetrando la materia nuclear fue comparado con el de una molécula ~~solo~~ ^{se formado} en un líquido, cuya característica sobresaliente es la de ~~desaparecer~~ ^{disiparse} rápidamente en energía y momento mediante dando lugar a complicados movimientos entre las otras moléculas presentes. El estado de movimiento así alcanzado necesitaría mucho tiempo para recombinarse accidentalmente, de tal manera que ~~se desvanece~~ ^{se satisface} permita la excitación de uno de los modos es peciales a través del cual la desintegración del nucleo compuesto es energéticamente posible.

Aunque el éxito de este modelo fue definitivo en la explicación de un gran número de fenómenos observados en las reacciones nucleares, sabemos que los estados base de los nucleos así como los de baja excitación exhiben características totalmente opuestas a las anteriormente mencionadas, las cuales pueden ser descritas en términos de un modelo de partículas independientes.

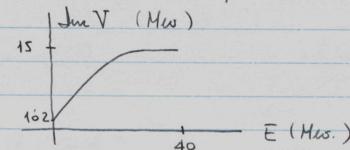
(H. Göttert-Mayer and Jensen: Elementary Theory of the Nuclear Shell Model). En este modelo, el movimiento de cada nucleón es independiente del movimiento de los otros, excepto por el principio de exclusión y está sujeto a la acción de un campo medio producido por la presencia de los otros nucleones.

Nuestra evidencia experimental muestra un comportamiento de la materia nuclear que cambia rápidamente cuando crece la energía de excitación. A bajas energías, particularmente en sus estados base, el movimiento de los nucleones es marcadamente bien descrito en términos de estados de partículas independientes, pero cuando crece la energía van produciéndose efectos de muchos cuerpos del tipo encontrado en los líquidos ordinarios. Un buen ejemplo de esta situación general es la dependencia de la ~~desaparición~~ que el potencial efectivo que actúa sobre un nucleón, cuando éste entra en la materia nuclear, es ^{físicamente} dependiente de la energía. Este potencial efectivo, llamado potencial óptico es la explicación a la contradicción aparente entre el modelo dissipativo de Bohr y el modelo de Mayer-Jensen en el que los efectos dissipativos están ausentes.

(Feshbach, Porter and Weisskopf: Phys Rev. 96, 448, 1954)
La parte imaginaria del potencial óptico describe la absorción de la onda que representa el nucleón incidente, así como la respectiva transmisión de momento a las excitaciones de muchos cuerpos en la materia nuclear. Mientras que la parte real del potencial casi no cambia con la energía, la parte imaginaria es muy pequeña para nucleones incidentes de bajas energías y crece rápidamente, alcanzando un valor un poco mayor que la tercera parte de la parte real, para altas energías (alrededor de 40 Mev. o más). Este comportamiento es una clara manifestación de la transición de propiedades de partículas independientes a movimientos de muchos cuerpos,

características del estado líquido.

Se sigue ~~de~~ de lo anterior que la parte imaginaria del potencial óptico fija el valor del camino medio libre λ en el movimiento "independiente" del nucleón incidente en la materia nuclear. Así para una variación de la parte imaginaria del tipo:



se encuentra $\lambda \approx 2 f$ para $E \approx 30$ Mev. (dissipación muy rápida) y $\lambda \approx 15 f$ para $E = 0$ (alta probabilidad de atravesar las dimensiones del núcleo sin dissipación).

La visión de la materia nuclear, como ha sido presentada en lo anterior, es a primera vista, difícil de entender. ¿Cómo puede un sistema, con un cambio relativamente pequeño de energía, cambiar de un comportamiento a otro completamente opuesto? más aun, ¿cómo puede exhibir simultáneamente ambos comportamientos a energías intermedias? La respuesta es que la materia nuclear no es un líquido ordinario sino un líquido de Fermi a, o cerca del, cero absoluto, esto es, en, o casi en su estado cuántico fundamental. Esta respuesta está basada en la hipótesis, muy razonable al presente, de que las fuerzas nucleares en el interior de los nucleos básicamente son fuerzas entre pares de nucleones, idénticas a las observadas entre pares de nucleones libres.

Resulta así que el estudio de la materia nuclear es el estudio de un líquido de Fermi en condiciones cuánticas extremas. La palabra líquido significa que se trata de un estado ligado (energía total $E_0 < 0$), homogéneo (densidad constante, esto es, E_0 proporcional a N) y sin orden a grandes distancias. Notese que la homogeneidad implica saturación de las fuerzas nucleares. Cualquier líquido de Fermi, por lo menos si no es muy denso, manifiesta

propiedades de partículas independientes, como las encontradas en la materia nuclear, y también propiedades dissipativas de importancia creciente cuando se eleva la temperatura. Los aspectos de partículas independientes en sí mismos no son de una naturaleza muy sutil y en realidad están muy influenciados por efectos colectivos, un ejemplo de los cuales es la dependencia del momento que el potencial al que los nucleones individuales están sujetos dentro de la materia nuclear, la cual muchas veces se expresa como una masa efectiva. El reconocimiento y entendimiento de tales efectos colectivos muestra que no existen antagonismos reales entre los aspectos de partículas independientes y los efectos dissipativos en el movimiento. El antagonismo aparente que aparece a primera vista se debe a la ingenua extrapolación de nuestro concepto clásico de un líquido al caso de condiciones cuánticas extremas.

La justificación de los anteriormente discutidos deberá hacerse en términos de una Teoría de Líquidos de Fermi, en su estado base o cerca de él. Si tal teoría describe el comportamiento colectivo de dichos líquidos, podemos estudiar la materia nuclear en conjuntos, esto es, el caso de un núcleo extendido indefinidamente en todas direcciones, como suponemos que existiría si no hubiera repulsión coulombiana entre los protones. Muy probablemente podríamos extender nuestro estudio a la superficie de nucleos no muy ligeros, si es que nuestra teoría nos permite conocer algo sobre la naturaleza de la superficie libre del líquido de Fermi lo que realmente hemos logrado hasta ahora es un estudio del comportamiento colectivo de un gas de Fermi, de los muy densos, en su estado base, así como algún conocimiento sobre las excitaciones individuales de partículas dentro de tal sistema. Tenemos buenas razones para pensar que las propiedades de un líquido no son, por lo menos cualitativamente,

las mismas que las de un gas diluido, suponiendo pequeña la densidad del líquido en equilibrio. (Esto es rigurosamente cierto para los líquidos clásicos y bajo ciertas condiciones se ha encontrado válido para sistemas de Bose cerca del cero absoluto). En nuestros estudios aceptaremos, sin otra discusión, válido también este resultado en el caso de sistemas de Fermi considerando

Hemos dicho ya que la materia nuclear como un líquido de Fermi, de baja densidad, en su estado fundamental. Está caracterizado por los parámetros: su densidad ρ (ó el volumen por partícula $V_0 \equiv \frac{1}{\rho}$) y su energía por partícula E_0 . El orden de magnitud de estos parámetros es:

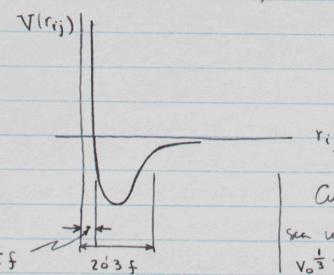
$$\rho^{-1} = V_0 \approx 4 \text{ ó } 5 \text{ fm}^3 \quad (N \approx 10^{17} \text{ fm}^{-3})$$

$$E_0 \approx -14 \text{ ó } -15 \text{ Mev.}$$

Hasta el presente no tenemos un conocimiento preciso sobre la naturaleza del potencial entre nucleones. En nuestro estudio suponemos únicamente interacciones entre pares de nucleones, esto es

$$V = \sum_{i,j}^N V_{ij} \quad V_{ij} \equiv V(r_{ij})$$

Sobre las V_{ij} solo sabemos que contienen un centro repulsivo, que depende del spin y que presentan carácter de intercambio. Un diagrama gráfico de estos potenciales es:



Cuantitativamente, que la materia nuclear sea un líquido de baja densidad quiere decir que $V_0^{-\frac{1}{3}} \gg$ alcance del centro repulsivo.

Uno de los resultados de los estudios recientes es que la saturación de la materia nuclear es debida únicamente a la presencia del

centros repulsivos, situación análoga a la de los líquidos ordinarios. Primero se trató de explicar la saturación mediante el carácter de intercambios, en analogía con la teoría de la valencia). El líquido microscópico análogo a la materia nuclear es el He^3 aunque desgraciadamente está tan poco entendido como la materia nuclear. (De hecho, ambos se han estudiado al mismo tiempo).

Terminaremos esta sección mencionando los principales trabajos que nos han conducido al conocimiento actual sobre la materia nuclear:

- (1) H. Z. Euler. (*Z. Physik* 105, 553, 1937). Trabajo precursor en el que se considera la materia nuclear como un gas de fermiones. Las interacciones son consideradas como perturbaciones las cuales se introducen mediante el cálculo standard de perturbaciones. El cálculo fue hecho a un orden muy poco elevado ~~resultando desacertado~~ con resultados muy poco alentadores.
- (2) Brueckner et coll. (*Phys Rev.* 95, 219, 1954; 96, 908, 1954; 97, 1344, 1955; 100, 36, 1955; 103, 1008, 1956; Cf. también H.A. Bethe *Phys Rev.* 103, 1353, 1956). Estos trabajos parten de ideas tomadas de la teoría de colisiones múltiples, dando lugar, a través de varias reformulaciones y mejoras, a una teoría adecuada para el estudio del estado base de sistemas de Fermi. Este método perfecciona las técnicas del cálculo de perturbaciones permitiendo incluir fuerzas singulares. Es un método no sistemático, intuitivo en gran parte y con algunos puntos dudosos. Posteriormente veremos que las afirmaciones de Brueckner y Bethe en el sentido de que las ecuaciones de Brueckner no están restringidas únicamente a bajas densidades, no son correctas.
- (3) N.M. Hugenholtz (*Physica* 23, 481, 1957). Este es un estudio sistemático de sistemas de N fermiones en interacción, para N grande. Estudia la energía y la función de orden del estado fundamental, y de ciertos estados excitados, utilizando una

técnica de perturbaciones mejorada. Este método permite desarrollos en series de potencias de la densidad, análogos, en este punto de vista a los desarrollos del virial para los gases clásicos. Un análisis semejante ha sido realizado por J. Goldstone. (*Proc. Roy. Soc. A* 239, 267, 1957)

- (4) Brueckner and Gammel (*Phys Rev.* 105, 1679, 1957). Este es un trabajo dedicado a cálculos numéricos, usando las ideas de Brueckner antes mencionadas y un potencial realista. Se encuentra muy buena concordancia con los experimentos, aunque el valor de ϵ resulta muy sensible a los detalles del potencial.
- (5). Gomez, Walecka and Weisskopf (*Ann of Phys* 3, 247, 1958). Utilizando un potencial mucho más simplificado obtienen buena concordancia con los valores experimentales. Esto sugiere que se puede comprender la nucleo nuclear viéndolo solamente los raios esenciales del potencial, lo cual reafirma nuestra confianza en el punto de vista actual.

II. Teoría general de un Gas de Fermi diluido.

En esta sección básicamente seguiremos el trabajo de Hugenholtz. Nuestro objetivo es obtener en forma sistemática, desarrollos en potencias de la densidad, de las cantidades de interés físico. Para densidades pequeñas es razonable pensar que las fuerzas de interacción entre partículas sean débiles en algún sentido, por lo menos en promedio. Resulta entonces natural adoptar un tratamiento en el que las fuerzas de interacción sean consideradas como perturbaciones. Sin embargo este tratamiento de perturbaciones debe ser tal que pueda resolver las siguientes dos dificultades:

Primero: aunque la energía potencial media por partícula sea pequeña, el cálculo de perturbaciones de lugar a muchos términos que contienen esta cantidad multiplicada por varias potencias de N , el número total de partículas del gas. Sin embargo, como muchos de estos términos grandes se cancelan, nuestro cálculo de perturbaciones debe

formarse de tal manera que nos exige que tales cancelaciones han sido tenidas en cuenta sistemáticamente, lo que aseguraría que la rapidez de convergencia no se ve afectada por el tamaño de N . Esta dificultad ha sido resuelta, tanto para energías como para funciones de onda, en el trabajo de Hagenholz.

En segundo lugar, las fuerzas entre partículas usualmente presentan características singulares a cortas distancias, esto es, ^{como por ejemplo,} pueden contener certos repulsivos. Obviamente fuerzas singulares como éstas no pueden ser consideradas por los métodos ordinarios de perturbación. En este punto, nuevamente el método de Goldstone y Hagenholz nos permite una solución sin singularidades. En este método se pueden aislar, de los desarrollos completos de perturbación, para las cantidades de interés físico, aquellas sumas parciales cuya convergencia puede ser obtenida por las singularidades y encontrar cuál es la ecuación que un contribución total ^{esta ecuación} satisface. Se puede entonces encontrar ésta ^{esta ecuación} resolviendo tal ecuación. ^{esta ecuación} resulta con una estructura ^{esta ecuación} remanente a la ecuación de Schrödinger para la descripción de la colisión de dos cuerpos, excepto en que contiene un parámetro con energía compleja.

Es interesante hacer notar que las dos dificultades anteriores mencionadas no tienen nada que ver con efectos cuánticos y aparecen también en la teoría clásica de los gases diluidos en donde su solución ha de darse mediante un desarrollo de Ursell-Mayer para la función de partición. (Ursell: Proc. Cambr. Phil. Soc. 23, 685, 1927; Mayer: J. Chem. Phys. 5, 67, 1937 y 6, 87, 1938). El método de Goldstone-Hagenholz aplicado a un gas diluido de Fermi a temperatura cero, puede caracterizarse como un análogo cuántico al desarrollo de Ursell-Mayer. Estudios remarcables, aunque más complicados han sido efectuados para un gas de Bose a temperatura cero (Bogoliubov and Zubakov. Soviet Phys. 1, 83, 1955); Lee, Hwang and Yang. Phys. Rev. 106, 1135, 1957; Binekhan and Sazadeh Phys. Rev. 106, 1117, 1957).

Consideremos un sistema de N partículas idénticas, encerradas en un vol. Ω . Haremos un estudio asintótico para $N \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow \infty$ de tal manera que

$$\frac{N}{\Omega} = \rho$$

cantidad es una magnitud dada (finita). Consideraremos fermios propiamente a potencias de N y los primeros contribuciones de orden N^{-2} ($\lambda > 0$). Supondremos, por simplicidad, que Ω es un cubo de lado L y tomaremos condiciones periódicas a la frontera. (De hecho es imposible cumplir condiciones a la frontera una realista. Sin embargo se supone que los efectos de superficie son despreciables para N grande.) La Hamiltoniana del nuestro sistema es:

$$H = H_0 + V$$

$$H_0 = - \sum_{j=1}^N \Delta_j^2 \quad (\hbar = 2m = 1)$$

Supondremos la energía potencial:

$$V = \sum_{|i-j|} V_{ij}$$

$$V_{ij} = V_{int}(|r_i - r_j|)$$

de la cual esté caracterizada por variables de spin, intercambio etc. las cuales no escribiremos. Consideraremos V como una perturbación (bajo la hipótesis: $\rho^{-\frac{1}{3}} \gg$ alcance del centro repulsivo).

a) Problema no perturbado.

Expresaremos las soluciones no perturbadas con la ayuda de estados individuales (estados ^{representando} de una partícula) los cuales tomaremos como ondas planas con vector de onda:

$$l_x = 2\pi L^{-\frac{1}{3}} n_x$$

$$l_y = 2\pi L^{-\frac{1}{3}} n_y$$

$$l_z = 2\pi L^{-\frac{1}{3}} n_z$$

determinados por las cond. a la frontera. La función de onda individual correspondiente es:

$$\varphi_{\ell}(x) = N^{-\frac{1}{2}} e^{i \ell \cdot x}$$

Un estado estacionario típico del sist. de N fermiones es:

$$|\psi_{l_1, \dots, l_N}(x_1, \dots, x_N)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left| \begin{array}{c} \varphi_{l_1}(x_1) \dots \varphi_{l_1}(x_N) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \varphi_{l_N}(x_1) \dots \varphi_{l_N}(x_N) \end{array} \right\rangle$$

el cual automáticamente satisface el principio de exclusión de Pauli.
($l_1 \neq l_2 \neq \dots \neq l_N$). Este función satisface la ec.

$$H_0 |\psi_{l_1, \dots, l_N}\rangle = \sum_j \frac{|l_j|^2}{2m} |\psi_{l_1, \dots, l_N}\rangle$$

Introduciendo operadores \hat{x}_e , \hat{x}_e^* de aniquilamiento y creación Λ_e resp. los cuales satisfacen:

$$\{\hat{x}_e, \hat{x}_{e'}\} = \{\hat{x}_e^*, \hat{x}_{e'}^*\} = 0$$

$$\{\hat{x}_e, \hat{x}_e^*\} = \delta_{ee'}$$

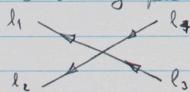
se tiene:

$$H_0 = \sum_e \frac{1}{2m} \hat{x}_e^* \hat{x}_e$$

$$V = \frac{1}{4\pi} \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} W(l_1, l_2, l_3, l_4) \hat{x}_{l_1} \hat{x}_{l_2}^* \hat{x}_{l_3} \hat{x}_{l_4} \delta_{l_1+l_2, l_3+l_4}$$

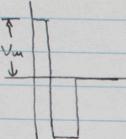
$$\text{con: } W(l_1, l_2, l_3, l_4) = \int dx_1 dx_2 \varphi_{l_1}^*(x_1) \varphi_{l_2}^*(x_2) V(x_1, x_2) [\varphi_{l_3}(x_1) \varphi_{l_4}(x_2) - \varphi_{l_3}(x_2) \varphi_{l_4}(x_1)]$$

Este elemento de matriz puede representarse como:



Notese que el δ expresa la conservación de momento.

Para evitar la divergencia de la W debido al centro repulsivo, sumamos por los puntos un potencial cortado, como el de la figura. En el resultado final se agrupan todos los fermiones que, individualmente se hacen nulos en el límite $V_m \rightarrow \infty$ y se encontrará que



en suma permanece finita en dicho límite.

Introduciendo el vacío $|0\rangle$, los estados del sistema son:

$$|\psi_{l_1, \dots, l_N}\rangle = |\hat{x}_{l_1}^* \hat{x}_{l_2}^* \dots \hat{x}_{l_N}^* |0\rangle$$

Se sigue de las reglas de commutación que estos fermiones también satisfacen automáticamente el principio de exclusión.

Introduciéndole la notación siguiente, que es más adecuada para el límite $N \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow \infty$ (el continuo).

$$\frac{8\pi^3}{\Omega} \sum_e \equiv \int_e$$

$$\text{Notac: para } \Omega \rightarrow \infty \quad \int_e \rightarrow \int d_3 l \equiv \int d\Omega$$

$$\frac{1}{8\pi^3} S_{\Omega, \Omega} \equiv S(\Omega - \Omega') = \begin{cases} \frac{1}{8\pi^3} & \Omega = \Omega' \\ 0 & \Omega \neq \Omega' \end{cases}$$

También en el límite $S(l - l')$ es la δ de Dirac. En efecto:

$$\int_e f(l) \delta(l) = \frac{8\pi^3}{\Omega} \sum_e \frac{1}{8\pi^3} f(l) S_{\Omega, \Omega} = f(0)$$

$$\tilde{x}_e \equiv \sqrt{\frac{1}{8\pi^3}} x_e \quad \tilde{x}_e^* \equiv \sqrt{\frac{1}{8\pi^3}} x_e^*$$

$$\therefore \{\tilde{x}_e, \tilde{x}_{e'}^*\} = \delta(l - l')$$

En términos de estos cantidades:

$$H_0 = \int_e \frac{1}{2m} \tilde{x}_e^* \tilde{x}_e$$

$$V = \frac{1}{4} \int_{l_1, l_2, l_3, l_4} W(l_1, l_2, l_3, l_4) \tilde{x}_{l_1}^* \tilde{x}_{l_2}^* \tilde{x}_{l_3} \tilde{x}_{l_4}$$

$$\text{con: } W(l_1, l_2, l_3, l_4) \equiv \frac{W(l_1 l_2 l_3 l_4)}{8\pi^3} \delta(l_1 + l_2 - l_3 - l_4)$$

Todos estos cantidades son finitas en el límite $\Omega \rightarrow \infty$.

Los estados estacionarios no perturbados los definiremos a partir del

estado fundamental (no perturbado) que es aquel en el que los N fermions están en estados tales que el sistema tiene la energía cinética mínima. Este estado es entonces, el formado llevando sucesivamente los niveles, comenzando por el más bajo hasta un valor límite p_F , llamado el momento de Fermi.

$$|\phi_0\rangle = \prod_{k=1}^N |\psi_k\rangle$$

$\text{con } p_k < p_F$

$$\text{Se tiene entonces: } \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle = 1$$

De energía e_0 del estado fundamental no perturbado es:

$$H_0 |\phi_0\rangle = e_0 |\phi_0\rangle$$

Las cantidades p_F y e_0 están ligadas a la densidad y el volumen del sistema:

$$p_F = \frac{4}{6\pi^2} \frac{V}{3}$$

$$e_0 = \Omega \frac{4}{20\pi^2} p_F^5$$

(En general tenemos:

$$p = (2S+1)(2S'+1) \frac{p_F^3}{6\pi^2}$$

$$e_0 = \Omega (2S+1)(2S'+1) \frac{p_F^5}{20\pi^2}$$

donde S y S' son los spins, ordinarios e isobárticos respectivamente). Notar que e_0 es proporcional a N . En fermiones livianos esperamos que la energía del estado fundamental perturbado sea también proporcional a N .

Consideremos ahora estados excitados no perturbados. La excitación elemental es de dos tipos:

$$|k\rangle = \gamma_k^* |\phi_0\rangle \text{ con } |k| > p_F$$

que representan una partícula excitada, esto es, una partícula fuera del marco de Fermi, a la que en adelante llamaremos simplemente una partícula y:

$$|m\rangle = \gamma_m |\phi_0\rangle \text{ con } |m| < p_F$$

el cual se comporta como una partícula liviana en el marco de Fermi. Adoptando un lenguaje semejante al de la teoría de Dirac, le llamaremos en adelante un agujero. El momento de este agujero es $-m$ y su energía $-m^2$.

Un estado general con p partículas, con momentos k_1, k_2, \dots, k_p y t agujeros con momentos $-m_1, -m_2, \dots, -m_t$ será escrito como:

$$|k_1 k_2 \dots k_p m_1 m_2 \dots m_t\rangle = \gamma_{k_1}^* \dots \gamma_{k_p}^* \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_t} |\phi_0\rangle$$

(Notar que estamos escribiendo k 's para los momentos mayores que p_F y m 's para los menores). De def. de γ y γ^* da la normalización:

$$\langle k m | k' m' \rangle = \delta(k-k') \delta(m-m')$$

Disponemos entonces de un sist. completo de estados no perturbados. Los valores propios como ponderantes están dados por:

$$H_0 |km\rangle = (e_0 + k^2 - m^2) |km\rangle$$

Notar que k^2 y m^2 son finitos e independientes de N .

b) Cálculo de perturbaciones para el solvente.

El solvente se define como:

$$R_2 \equiv \frac{1}{H - e_0 - z} = \frac{1}{H_0 + V - e_0 - z}$$

donde z es un parámetro complejo, con dimensiones de energía. Nos interesa principalmente sus valores en el eje real.

Se sigue de la def.

$$R_2 = \frac{1}{H_0 - e_0 - z} - \frac{1}{H_0 - e_0 - z} V R_2$$

o igualando:

$$R_2 = \frac{1}{H_0 - e_0 - z} - \frac{1}{H_0 - e_0 - z} V_z \frac{1}{H_0 - e_0 - z}$$

$$\text{con: } V_z = V - V \frac{1}{H_0 - e_0 - z} V + V \frac{1}{H_0 - e_0 - z} V \frac{1}{H_0 - e_0 - z} V \dots$$

Consideraremos algunos ejemplos sobre el cálculo de elementos de matriz

de este resultado y su representación mediante diagramas. (Cf. el trabajo de Hagenholz)

i) Elementos de matriz que relacionan el estado fundamental con los estados.

$$\langle \phi_0 | P_2 | \phi_0 \rangle = \frac{1}{e_0 - e_0 - z} - \frac{1}{z^2} \langle \phi_0 | V_2 | \phi_0 \rangle$$

El elemento de matriz del 2º miembro contiene una intensidad de contribución. Examinemos algunas.

A orden 1:

$$\langle \phi_0 | V | \phi_0 \rangle = \frac{1}{2} \int_{u_1 u_2} V(u_1 u_2 u_2 u_1)$$

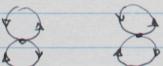
Este elemento describe una transición en la cual dos partículas contenidas en la esfera de Fermi colisionan terminando en sus estados iniciales o intercambiandolas. Otra interpretación posible es la de un proceso en el cual se crean dos agujeros u_1, u_2 los cuales son absorbidos posteriormente. El diagrama correspondiente es:



A orden 2 se tienen dos contribuciones.

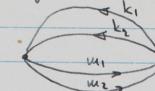
$$\begin{aligned} \langle \phi_0 | V \frac{1}{e_0 - e_0 - z} V | \phi_0 \rangle &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left[\int_{u_1 u_2} V(u_1 u_2 u_2 u_1) \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{4} \int_{u_1 u_2 k_1 k_2} \frac{1}{e_0 + k_1^2 + k_2^2 - u_1^2 - u_2^2 - z} V(k_1 k_2 u_1 u_2) \end{aligned}$$

Estas dos contribuciones difieren por el efecto intermedio. En el 1º caso este es el vacío y se tienen dos procesos sucesión del tipo anular:



En el 2º proceso se crean primero los agujeros y las partículas (esto es la colisión de las partículas dentro del mar de Fermi les permite salir al exterior). Posteriormente se absorben tanto los agujeros como las

partículas. El diagrama corresponde a:



Las líneas orientadas hacia la izq. representan partículas, las orientadas a la derecha agujeros en el mar de Fermi.

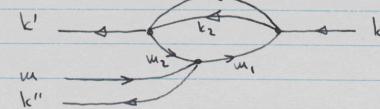
ii) Consideremos ahora una contribución típica del elemento de matriz

$$\langle k' k'' u | V_2 | k \rangle$$

Utilizaremos la notación

$$\langle k' k'' u | \{V_2\}_S | k \rangle$$

para representar la contribución de un diagrama S en el elemento de matriz considerado. Tomemos, por ejemplo, para S el diagrama:



Este es un diagrama de orden 3 que representa los procesos:

a) una partícula k es absorbida con emisión de dos partículas k_1, k_2 y un agujero u_1 .

b) el agujero u_2 es absorbido con emisión de una partícula k'' y dos agujeros u_1, u_2

c) el agujero u_2 y las partículas k_1, k_2 son absorbidas y la partícula k' es emitida.

De acuerdo con los cálculos anteriores se sigue que el diagrama da la contribución:

$$\int_{k_1 k_2 u_1 u_2} \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - u_1^2 - u_2^2 + k^{(12)}_2} V(k'' u_1 u_2 u) \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - u_1^2 - z} V(k'_1 k'_2 u_1 u_2)$$

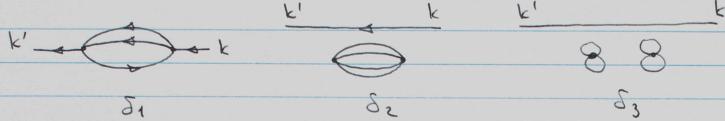
La contribución de este diagrama en el resultado es:

$$\langle k' k'' u | \{V_2\}_S | k \rangle = \frac{\langle k' k'' u | \{V_2\}_S | k \rangle}{(k'^2 + k''^2 - u^2 - z)(k^2 - z)}$$

iii) Consideremos algunas contribuciones típicas al elemento de matriz:

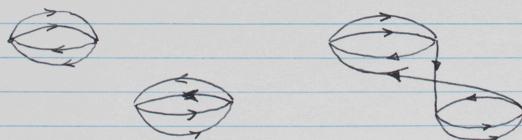
$$\langle k' | V_z | k \rangle$$

a 2º orden:



Los diagramas del tipo S_1 se llaman conexos mientras que los del tipo S_2, S_3 se llaman no conexos. Los ^{diseños} que componen estos últimos se llaman componentes conexas del diagrama.

Un hecho general importante que recordar es que en el cálculo de los diagramas no es necesario tener en cuenta el principio de exclusión para las partículas y los agujeros en los estados intermedios ya que el hecho de que dos partículas (o dos agujeros) no pueden ocupar el mismo estado está asegurado automáticamente por una compensación entre diagramas que difieren en intercambio de partículas ó agujeros. Un ej. de tal compensación lo dan los diagramas:



Analicemos la estructura analítica de los elementos de matriz a fin de conocer su dependencia en z y en Ω . (El grande)

Consideremos primero un diagrama conexo, por ej. aquél de nuestro ejemplo ii). Efectuando las sumas y teniendo en cuenta la definición de $V(l_1 l_2 l_3 l_4)$ se encuentra un resultado de la forma:

$$F_z(k' k'' m k) \delta(k' + k'' - m - k)$$

Si S expresa la conservación del momento total, F_z es indep.

de Ω cuando $\Omega \rightarrow \infty$, ya que el único modo como puede depender de Ω es mediante el número \int que tiene en este caso a una integral. Para valores complejos de z , los denominadores de energía no se pueden anular, resultando F_z regular para z compleja. Se puede demostrar que para z real, las iniciales discontinuidades de F_z son discontinuidades finitas que aparecen cuando se ^{añade} un corte de ramificación en el eje real.

$+ \infty$

Este comportamiento es el mismo para todo diagrama conexo con líneas externas.

Un diagrama contribuye al estadio fundamental cuando no tiene líneas externas. Consideremos ahora un diagrama conexo sin líneas externas. Un ejemplo es:



$$\langle \phi_0 | \{V_z\}_{S_1} | \phi_0 \rangle$$

Se encuentra como en el caso anterior:

$$S(0) F_z$$

F_z es una función finita de z con un corte de ramificación sobre el eje real. En este caso se extiende de 0 a $+\infty$.

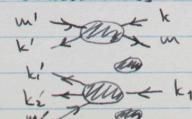
$$\text{Como } S(0) = \frac{\Omega}{8\pi^3}$$

$$\langle \phi_0 | \{V_z\}_{S_1} | \phi_0 \rangle = \frac{\Omega}{8\pi^3} F_z$$

Este diagrama no da una contribución finita para $\Omega \rightarrow \infty$.

La contribución de todos los diagramas conexos del vértice es proporcional a Ω . (Habíamos hecho lo más simple para que se caracterizara por ausencia de agujeros y partículas.)

Consideremos ahora un diagrama no conexo. Por ejemplo:



(Los segmentos resaltados representan cualquier parte conexa del diagrama).

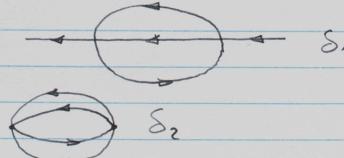
Se encuentra fácilmente en este caso:

$$\langle k' k'_1 k'_2 m' m'_1 \{V_2\} S | k k, m \rangle = \\ = S(k - m - k + m) S(k_1 + k'_1 - m'_1 - k_1) \left(\frac{\alpha}{8\pi^3}\right)^2 F_2(k m m' k'_1 k_1 k'_2 m'_1)$$

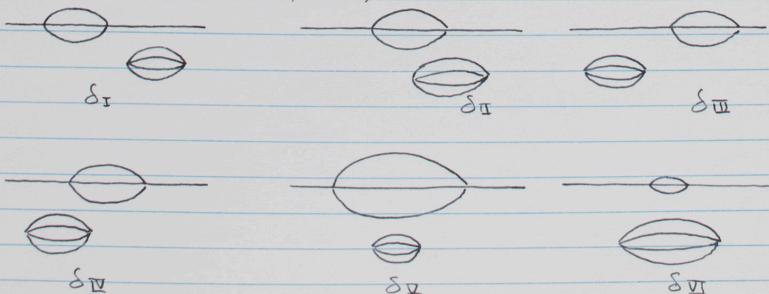
Cada componente conexa del vaivén de un factor α mientras que cada conexa de una S . F_2 es finita e independiente de α para $\alpha \rightarrow \infty$.

Quisiéramos ahora el siguiente problema: Reducir. Sustituir las contribuciones de diagramas no conexos, por sumas parciales de contribuciones de diagramas conexos. De esta manera se disminuirán las potencias elevadas de α que aparecerían en diagramas que contenían un gran número de componentes conexas.

Tomemos como ejemplo un caso de dos componentes conexas:



Los diagramas que se pueden obtener combinando estos componentes son: (Noten que siendo diferentes los edos intermedios los diagramas dan contribuciones diferentes)



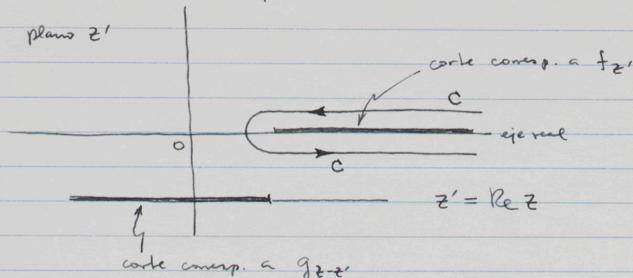
Se puede demostrar que la suma de estos 6 diagr. se puede expresar simplemente en términos de los dos diagramas conexos S_1 y S_2 (complementos de los diagramas no conexos) como:

$$\langle k | \{R_2\}_{S_1} | k \rangle + \langle k | \{R_2\}_{S_2} | k \rangle + \dots + \langle k | \{R_2\}_{S_{12}} | k \rangle = \\ = \langle k' | \{R_2\}_{S_1} | k \rangle * \langle 0 | \{R_2\}_{S_2} | 0 \rangle \quad (a)$$

donde $h_2 = f_2 * g_2$ es la convolución de las funciones f_2 y g_2 (que se suponen analíticas en todo el plano excepto en el eje real y desean caer por lo menos como $\frac{1}{z}$ para $|z| \rightarrow \infty$) la cual se define como:

$$h_2 = \frac{i}{2\pi} \int_{C'} f_2(z) g_{2-z} dz'$$

y el contorno C es el siguiente:



C debe separar los dos cortes.

No daremos una demostración de este teorema (Cf. trabajo de Hugenholtz) pero indicaremos el razonamiento seguido a fin de aclarar la razón del resultado. Supongamos que los dos diagramas parciales describen dos sistemas físicos sin interacción, descritos por la Hamiltoniana:

$$H = H_1 + H_2$$

H_1 se refiere al 1er diagrama, H_2 al segundo. Supongamos que H_1 y H_2 commutan. Sean:

$$R_z = \frac{1}{H-z}$$

$$R_z^{(1)} = \frac{1}{H_1-z}$$

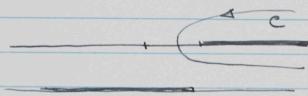
$$R_z^{(2)} = \frac{1}{H_2-z}$$

Se sigue que:

$$\frac{1}{H-z} = \frac{1}{H_1-z} * \frac{1}{H_2-z} \quad \text{o sea} \quad R_z = R_z^{(1)} * R_z^{(2)} \quad (b)$$

ya que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{1}{H_1-z'} \frac{1}{H_2-z+z'} dz' = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{i} \left[\frac{1}{H_1+H_2-z} \right] = \frac{1}{H-z}$$



Los círculos están formados por el conjunto de valores propios de H_1 y $H_2 + z$. Tomando un elemento de matriz de (b) entre productos de estados entre las dos distancias se obtiene (a). Es importante hacer nota que en la demostración completa hay que tener en cuenta que los diagramas parciales no son en realidad sistemas físicos independientes.

c) Estudio del estado fundamental.

(Contribución de orden $N^2 Z$).

c) Estudio del estado fundamental.

Consideremos la función:

$$D_z(0) = \langle \phi_0 | R_z | \phi_0 \rangle$$

$D_z(0)$ es la suma de contribuciones del tipo siguiente:

1) Contribución del término no perturbado:

$$-\frac{1}{z}$$

2) Contribución de todos los diagramas con una sola componente conexa:

$$B_z \equiv \sum_{\{\delta \text{ conex}\}} \langle \phi_0 | \{R_z\}_{\delta} | \phi_0 \rangle = \\ = \frac{1}{z^2} \sum_{\{\delta \text{ con}\}} \langle \phi_0 | \{V_z\}_{\delta} | \phi_0 \rangle = \frac{C}{z^2} F_z$$

donde F_z es ind. de β para β grande
Las gráficas que contribuyen son del tipo:



3) Contribución de diagramas con dos componentes: Aplicando el horizonte anterior se encuentra:

$$\frac{1}{2} B_z * B_z$$

4) Contribución de diagramas de n componentes, los cuales dan:

$$\frac{1}{n!} B_z * \dots * B_z \quad (n \text{ factores})$$

Se encuentra finalmente:

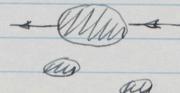
$$D_z(0) = -\frac{1}{z} + B_z + \frac{1}{2} B_z * B_z + \frac{1}{3!} B_z * B_z * B_z + \dots \quad (a)$$

una serie de tipo exponencial en la que los productos han sido reemplazados por convolutiones.

De manera análoga se encuentra que el elemento de matriz total:

$$\langle k | R_z | k' \rangle$$

el cual es una suma de diagramas del tipo:



Se puede mostrar que:

$$\langle k | R_z | k' \rangle = \delta(k-k') C_z(k) * D_z(0)$$

donde $C_z(k) \delta(k-k')$ es la suma de contribuciones $\langle k | \{ R_z \} | k' \rangle$ de todos los diagramas conexos. Para $R \rightarrow \infty$, $C_z(k)$ como función de k tiene un corte de ramificación y ningún polo.

Consideremos ahora el siguiente problema: ¿Se puede construir un estado estacionario perturbado $|t\rangle$ tal que:

$$H|t\rangle = E_0|t\rangle$$

y $|t\rangle \rightarrow |\phi\rangle$ para $V \rightarrow 0$?

Haremos aquí una reseña. Supondremos que el estado perturbado proveniente del estado fundamental no perturbado es el estado fundamental del sistema con interacción, aunque no podamos demostrarlo. No se puede excluir a priori la eventualidad de que el estado fundamental del sistema con interacción no pueda obtenerse aplicando un cálculo de perturbaciones al estado $|\phi\rangle$, como en el caso de la superconductividad.

Consideremos un estado no perturbado $|\alpha\rangle$. Si $D_z(\alpha)$ tiene un polo y_α (veremos más adelante que esto ocurre para $\alpha = \phi_0$) se puede mostrar que este polo es necesariamente real y de orden 1:

$$D_z(\alpha) \sim \frac{N_\alpha}{y_\alpha - z}$$

y tiene un residuo N_α comprendido entre 0 y 1 (Cf. Van Hove Physica 21, 901, 1955 y 22, 343, 1956).

En estas condiciones, se demuestra que el estado perturbado correspondiente está dado por:

$$|t_\alpha\rangle = N_\alpha^{-\frac{1}{2}} \lim_{z \rightarrow y_\alpha} (y_\alpha - z) R_z |t\rangle$$

o, para todo estado $|\beta\rangle$

$$\langle \beta | t_\alpha \rangle = N_\alpha^{-\frac{1}{2}} \lim_{z \rightarrow y_\alpha} (y_\alpha - z) \langle \beta | R_z | \alpha \rangle$$

esto es, $\langle \beta | t_\alpha \rangle$ es proporcional al residuo de $\langle \beta | R_z | \alpha \rangle$ en el polo $z = y_\alpha$. El factor $N_\alpha^{-\frac{1}{2}}$ asegura que la norma de el estado perturbado es igual a la norma del estado perturbado correspondiente.

Verifiquemos que $|t_\alpha\rangle$ es un estado estacionario. Como:

$$H R_z = (E_0 + z) R_z + 1$$

(def. de R_z), mult. a la izq. por $N_\alpha^{-\frac{1}{2}} (y_\alpha - z)$ y operando sobre $|t_\alpha\rangle$, en el límite tenemos:

$$\begin{aligned} \lim H N_\alpha^{-\frac{1}{2}} (y_\alpha - z) R_z |t_\alpha\rangle &= \lim N_\alpha^{-\frac{1}{2}} (E_0 + z) (y_\alpha - z) R_z |t_\alpha\rangle \\ &\quad + \lim N_\alpha^{-\frac{1}{2}} (y_\alpha - z) |t_\alpha\rangle \end{aligned}$$

$$\therefore H|t_\alpha\rangle = (E_0 + y_\alpha)|t_\alpha\rangle$$

Estudiemos ahora la energía del estado fundamental. Aplicaremos lo anterior al estado $|\alpha\rangle = |\phi_0\rangle$

Es necesario primordialmente establecer la existencia de un polo para $D_z(0)$ y calcular su residuo. Estudiaremos el desarrollo de $D_z(0)$ en convolutiones de R_z (Cf. (a)) mediante la transf. de Fourier. Sea:

$$\bar{f}_z \equiv \frac{i}{2\pi} \int f_z e^{-iz} dz$$

donde C es el contorno:



Aplicaremos el principio general según el cual las singularidades de f_2 se revelan por el comportamiento de \bar{B}_t para t grande.

Usando las relaciones:

$$\left(\frac{1}{z}\right)_t = 1$$

$$(\bar{f}_2 * \bar{g}_2)_t = \bar{f}_t \cdot \bar{g}_t$$

se tiene:

$$\bar{D}_t(0) = 1 + \bar{B}_t + \frac{1}{2} \bar{B}_t^2 + \dots = e^{\bar{B}_t}$$

Resulta entonces que nuestro problema se reduce al estudio asintótico de \bar{B}_t . Aplicaremos aquí el reciprocal del principio anteriores; así determinaremos el comportamiento asintótico de \bar{B}_t partiendo de las singularidades de B_2 que nos son conocidas.

B_2 tiene un polo doble en $z=0$ y un corte para z real > 0 .

Consideremos:

$$\bar{B}_t = \frac{i\Omega}{2\pi} \int_C e^{-itz} \frac{1}{z^2} F_2 dz$$

Supongamos que ~~desarrollando~~ la singularidad de F_2 (discontinuidad en el eje real) es nula en el origen, y que crece lentamente en la vecindad del origen, permitiendo definir la derivada F'_0 .

Desarrollando F_2 en serie en la vecindad del origen se tiene:

$$\bar{B}_t = \frac{i\Omega}{2\pi} \int_C e^{itz} \left[\frac{F_0}{z^2} + \frac{F'_0}{z} + \text{terminos regulares} \right] =$$

$$= \Omega \left[it F_0 - F'_0 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right]$$

Se sigue que para tiempos grandes, las contribuciones dominantes provienen de la parte singular de B_2 . Resulta entonces que el comportamiento asintótico de \bar{D}_t es:

$$\bar{D}_t \approx e^{(it F_0 - F'_0)\Omega}$$

$$D_2(0) \approx \frac{e^{-F'_0\Omega}}{-\Omega F_0 - z}$$

(b)

Este resultado exhibe la existencia del polo buscado: $z = -\Omega F_0$. La energía del estado fundamental es:

$$E_0 = \epsilon_0 + \gamma_0 = \epsilon_0 - \Omega F_0$$

, explícitamente:

$$E_0 = \epsilon_0 + \sum_{\text{conexas}} \langle \phi_0 | \{V_0\}_y | \phi_0 \rangle$$

donde $V_0 \equiv V_{z=0}$. Nota que E_0 es una magnitud extensiva, esto es, es proporcional a Ω , de acuerdo con lo que era de esperarse físicamente para un sistema grande, de densidad dada. Nota que el cálculo de perturbaciones a la "ingenua" nos habría conducido a una suma con todas las potencias de Ω . Otra cantidad obtenida en nuestra derivación es el residuo

$$N_0 = e^{-\Omega F'_0}$$

(Cf. eq (b))

Estudiaremos ahora la función de onda. A fin de calcular $R_2(\phi_0)$ consideremos el conjunto de diagramas sin líneas extensas a la derecha.

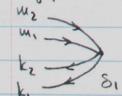


Para diagramas conexos del tipo S, definimos el operador



$$O'_2 = \sum_{\text{S conexas}} \int_{k_1, \dots, k_n} \langle \dots | \{R_2\}_S | \phi_0 \rangle$$

(S conexas sin líneas extensas a la derecha, pero con líneas extensas a la izquierda). Ejemplo: (contribución a 1er orden en V)



$$\int_{k_1, k_2, u_1, u_2} \langle \dots | \{R_2\}_S | \phi_0 \rangle$$

El operador O'_2 es independiente de Ω ya que no contiene mas que diagramas conexos con líneas exteriores.

El estado $R_2|\phi_0\rangle$ contiene entonces contribuciones de diagramas:

- 1) Unicamente componentes de vacío: $|\phi_0\rangle D_2(0)$
- 2) Una sola componente conexa con líneas exteriores:

$$O'_2 |\phi_0\rangle * D_2(0)$$

etc. Se sigue:

$$R_2|\phi_0\rangle = |\phi_0\rangle D_2(0) + O'_2 |\phi_0\rangle * D_2(0) + \frac{1}{2} O'_2 * O'_2 |\phi_0\rangle * D_2(0) + \dots$$

Se puede verificar fácilmente que la única manera de que una convolución $f_2 * g_2$ tenga un polo de orden 1 es que uno de los factores tenga un polo de orden 1. También se tiene que el polo de un producto es la suma de los polos y el residuo del producto es el producto de los residuos.

La función $O'_2 |\phi_0\rangle$ tiene siempre un factor $-\frac{1}{z}$ proveniente de la aplicación de $(H_0 - e_0 - z)^{-1}$ sobre $|\phi_0\rangle$. Entonces:

$$O'_2 = \frac{O_2}{-z}$$

Donde O_2 no tiene polos. Entonces, en la vecindad del polo:

$$O'_2 \approx \frac{O_2}{-z} \quad (z \approx 0)$$

Como: $\left(-\frac{1}{z}\right) * f(z) = \overline{f(z)} \quad \left(\left(-\frac{1}{z}\right) = 1\right)$ se tiene:

$$R_2|\phi_0\rangle \approx |\phi_0\rangle \frac{e^{-\alpha F_0}}{-\alpha F_0 - z} + O_0|\phi_0\rangle \frac{e^{-\alpha F_0}}{-\alpha F_0 - z} +$$

$$+ \frac{1}{2} O_0 O_0 |\phi_0\rangle \frac{e^{-\alpha F_0}}{-\alpha F_0 - z} + \dots =$$

$$= e^{O_0} |\phi_0\rangle \frac{e^{-\alpha F_0}}{-\alpha F_0 - z}$$

Como: $|\phi_0\rangle = N_0^{-\frac{1}{2}} \lim_{z \rightarrow y_0} (y_0 - z) R_2|\phi_0\rangle$ (Nota: αF_0)

$(y_0 = -\alpha F_0 \text{ y } N_0 = e^{-\alpha F_0})$ se obtiene:

$$|\phi_0\rangle = e^{-\frac{1}{2} \alpha F_0} e^{O_0} |\phi_0\rangle$$

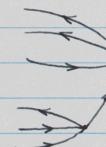
$$\text{con: } \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle = 1$$

Reescibamos explícitamente O_0 :

$$O_0 = - \sum_{r=1}^{\infty} \int_{k_1, \dots, k_r} \int_{m_1, \dots, m_r} \sum_{k_1}^* \sum_{k_r}^* \sum_{m_1} \dots \sum_{m_r} \frac{1}{\sum_{i=1}^r (|k_i|^2 - |m_i|^2)} *$$

$$\times \sum_{\text{conexas}} \langle m_1, \dots, m_r | k_1, \dots, k_r | \{V_0\}_r | \phi_0 \rangle$$

La suma \sum_r se extiende sobre todos los diagramas conexos con r líneas exteriores, esp. partidas y r también externas esp. agrupados, a la izq. y uniendo a la derecha. Ejemplos:



Para este diagrama $r=3$.

La probabilidad P de encontrar $|\phi_0\rangle$ en el estado fundamental perturbado es:

$$P = |\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle|^2 = e^{-\alpha F_0'}$$

(ya que $\langle \phi_0 | e^{O_0} | \phi_0 \rangle = \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle = 1$ pues $\langle k_1, \dots, m_r | \phi_0 \rangle = 0$)

En el modelo de part. indip. se supone que ϕ_0 es un det. de Slater para un campo medio. Para la matriza nuclear basta que el campo medio es constante y los estados estacionarios de una partícula son ondas planas. Resulta que, en este caso, la aproximación $|\phi_0\rangle = |\phi_0\rangle$

es muy mala ya que la probabilidad de encontrar $|\phi_0\rangle$ en $|\phi_0\rangle$ es mínima:

$$P = e^{-N g F_0'}$$

donde $g F_0'$ es finito y N grande. Resulta que $|\phi_0\rangle$ debe ser muy diferente a un det. de Slater. Frequentemente se acostumbra llamar

a $|1\phi\rangle$ la función de onda real mientras que a $|1\psi\rangle$ se le llama la función de onda representativa o modelo.

Es posible efectuar algunos cálculos con $|1\psi\rangle$ en vez de $|1\phi\rangle$ pero no hay que olvidar que entre ambas hay un operador actuando: $e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{P}\phi + 0}$. Lo que en general da lugar a concepciones erróneas.

Otro hecho importante que se adorna posteriormente es que el estado fundamental es el único estado estacionario estable.

d) Estados excitados.

Aplicaremos el procedimiento anterior al estudio de estados excitados, esto es, estados que representan situaciones en las que haya una partícula con momento ligeramente mayor que p_F , o agujeros con momento ligeramente menor que p_F , moviéndose dentro del gas en su estado base, polarizándolo y dando lugar a transiciones de tipo dissipativo. Veímos que estos estados son metastables, lo cual se expresa en que aproximadamente satisfacen una ec. de Schrödinger con eigenvalores complejos, cuya parte imaginaria representa el viajeo de la vida media y lleva este directamente relacionado con la parte imaginaria del potencial óptico.

Consideremos estados de la forma:

$$|k\rangle = \tilde{\zeta}_k^* |1\phi\rangle$$

que representan una partícula adicional con momento $k > k_F$.

Consideremos $D_2(k)$ definido por:

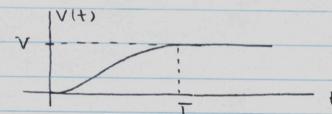
$$\begin{aligned} \langle k' | R_2 | k \rangle &= \delta(k' - k) D_2(k) = \delta(k' - k) D_2(0) * \zeta_2(k) \\ &= D_2(0) * \sum_{\text{partículas}} \langle k' | \{R_2\}_{\gamma} | k \rangle \end{aligned}$$

8

Para que $D_2(k)$ tenga un polo es necesario que $D_2(0)$ y $\zeta_2(k)$ tengan uno. El último solo tiene un corte de ramificación situado en el eje real. Se sigue que, como $D_2(k)$ no tiene polos, no podemos construir un estados estacionarios perturbados a partir de $|k\rangle$, como lo hicimos en el caso del estado fundamental. Físicamente esto significa que los estados $|k\rangle$ son esencialmente dissipativos. Analicemos un poco más que significa esto. Consideremos un gas de Fermi sin intracción a $t=0$ y apliquemos la intracción adiabáticamente entre $t=0$ y $t=T$ (T grande). Se puede probar que:

$$\langle \beta | e^{-i \int_0^T [H_0 + V(t')] dt'} | 1\phi \rangle \rightarrow e^{i \alpha T} \langle \beta | 1\phi \rangle$$

donde:



y αT es real. Esto significa que el estado fundamental no perturbado tiende al perturbado excepto por un factor de fase. En el caso del estado $|1\phi\rangle$ esto no pasa pues no existe un límite definido. Físicamente esto corresponde a que, cuando la intracción se hace presente, la partícula excitada entra en colisiones con las partículas de Fermi, disipando su energía en movimientos complicados.

No se puede construir un estado ~~totalmente~~ excitado perturbado, que sea estacionario y que tenga, para N grande, componentes matemáticas sencillas, relacionadas a los estados perturbados. Evidentemente deben existir estados estacionarios excitados pertenecientes al hamiltoniano total H , para cada valor de N . Pero su comportamiento para $N \rightarrow \infty$ parece, sin embargo, carecer de simplicidad matemática. Para $N \rightarrow \infty$, es física y matemáticamente más natural desarrollar una teoría de fenómenos inaccesibles para estudiar las magnitudes dissipativas del sistema perturbado arriba del estado fundamental. (Cf. Van Hove, Physica 23, 441, 1957).

Existen intracciones en las que la dissipación desciende anormalmente

es débil, como en el caso en el que la energía de excitación de la partícula incidente es débil (Feshbach, Pach and Weisskopf). Aquí:

$$0 < \frac{k}{k_F} - 1 \ll 1$$

S'espera entonces que la partícula ocupe un estado metastable quasi-estacionario, de vida media larga. En este caso es posible probar que $C_k(z)$ posee un "quasi-polo", esto es, se hace muy grande en la vecindad de un punto en el eje real. Este pico se aproxima a un polo verdadero cuando $k \rightarrow k_F$. Analíticamente se encuentra que:

$$\begin{aligned} C_2(k) &\approx \frac{N_k}{y_k - z - i\Gamma_k} \quad \text{para } \Im z > 0 \\ &\approx \frac{N_k}{y_k - z + i\Gamma_k} \quad \text{para } \Im z < 0 \end{aligned}$$

donde $\Gamma_k \ll k_F^2$. Al orden uno bajo: (2º orden) Γ_k es proporcional al número de transiciones que conservan la energía y el momento.

~~Sabemos que el producto $|1\rangle_k$~~ , Despreciando Γ_k se obtiene una situación aproximada en la que $C_2(k)$, y en consecuencia $D_2(k)$ tienen un polo. Se sigue de lo anterior que se puede construir un estado perturbado $|1\rangle_k$ que sea estacionario si $\Gamma_k = 0$ y que se reduce a $|k\rangle$ para $V=0$.

Como en realidad $\Gamma_k \neq 0$, $|1\rangle_k$ no es estictamente estacionario.

Se puede mostrar que es metastable con una vida media Γ_k^{-1} . Resulta entonces que en vez de serlo fija:

$$\langle 1\rangle_k |e^{-iHt}| 1\rangle_k = e^{-iE(k)t}$$

satisface:

$$\langle 1\rangle_k |e^{-iHt}| 1\rangle_k \approx e^{-i(E_0 + y_k)t} e^{-\Gamma_k|t|}$$

para $t k_F^2 \ll 1$, $\Gamma_k \ll k_F^2$, $\Gamma_k|t|$ finito.

El coeficiente de absorción caracteriza la disipación, esto es, la formación de nucleos compuestos por inyección de nucleos en un nucleo. (Cf. Hugenholz and Van Hove. Physica 24, 363, 1958)

La energía del estado metastable $|1\rangle_k$ es la energía E_0 del estado fundamental mas una energía de excitación y_k . La cantidad $y_k - i\Gamma_k$ constituye el potencial óptico introducido formalmente por Feshbach et al.

Se puede mostrar que

$$|1\rangle_k = O_k^+ |1\rangle_0$$

donde O_k^+ actua como un operador de creación de una partícula excitada a partir del estado fundamental perturbado. Sin embargo la estructura de O_k^+ es más compleja que la de ξ_k^+ , ya que describe los efectos: i) la creación de una partícula con impulso k , ii) la polarización de la materia nuclear en la vecindad de esta partícula. (esto es, crea una nube de polarización). Se sigue que el concepto inqueño de partícula independiente ^{no} es válido aquí, ya que la entidad que se propaga no es una onda plana sino un nucleón "vestido". Resulta también que la energía de excitación es:

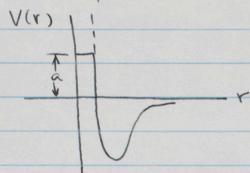
$$y_k = k^2 + \text{potencial medio} + \text{correciones débiles a la polarización}.$$

Es también, debido a este "vestido" que el nucleón puede atravesar d nucleos con un gran caminos medios libres sin sufrir más que una débil disipación ($\Gamma_k \ll k_F^2$ para $k \approx k_F$)

2) Inclusión de fuerzas singulares.

Hasta el momento se ha desarrollado una teoría de perturbaciones tal que la convergencia de los desarrollos no es afectada por el gran numero de partículas en el sistema. Consideremos ahora la segunda dificultad antes mencionada, esto es, la introducida por potenciales singulares como por ejemplo, la presencia de centros repulsivos. Esta dificultad se vuelve agudizando las contribuciones de diferentes lados de diagramas. Estos lados de diagramas se reseñarán de tal manera que la

combinación total permanece finita cuando un potencial finito aproximado se aproxima al verdadero potencial. Consideremos por ejemplo un potencial de la forma:



Debemos agrupar términos de tal manera que su combinación permanezca finita cuando $a \rightarrow \infty$.

Consideremos:

$$\langle k_1 k_2 | V | k'_1 k'_2 \rangle$$

A 1^{er} orden se tiene el diag.



Este es igual a la 1^a aprox. de Born. Esto como todos los siguientes divergen, aunque su suma permanece finita para $a \rightarrow \infty$. Parece entonces natural agrupar los diagramas caracterizados por el hecho de que una colisión dada se itera un número arbitrario de veces como por ejemplo:

$$X + XX + XXX + \dots$$

o bien:

$$+ \quad + \quad + \quad + \quad + \quad \dots$$

que simbólicamente representamos:

$$\text{Diagram with a loop} + \text{Diagram with a loop} + \dots$$

respectivamente. Suponiendo $k_1, k_2, k'_1 > k_F$, las sumas u

extienden sobre $k'_2 > k_F$ en el 1^{er} caso y $k'_2 < k_F$ en el 2^o. Se introduce entonces el operador:

$$\langle k_1 k_2 | K_2^0 | k'_1 k'_2 \rangle = \sum_S \langle k_1 k_2 | \{V_S\}_{S^2} | k'_1 k'_2 \rangle$$

Este operador satisface una ec. integral del tipo de la ec. de Schrödinger para un problema de dos cuerpos:

$$\langle k_1 k_2 | K_2^0 | k'_1 k'_2 \rangle = V(k_1 k_2, k'_1 k'_2) - \frac{1}{2} \int \frac{V(k_1 k_2, k''_1 k''_2) \langle k''_1 k''_2 | K_2^0 | k'_1 k'_2 \rangle}{k''_1 k''_2}$$

Las soluciones de esta ecuación son finitas para $a \rightarrow \infty$. (Debe notarse que k''_1 y k''_2 toman valores sobre estados de partículas, estos valores hacen del mar de Fermi).

f) El caso de baja densidad.

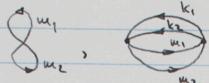
Una de las ventajas de formular cantidades físicas en términos de gráficas consiste en que los efectos se pueden ~~diseñar~~ clasificar fácilmente en potencias de la densidad.

Como regla general resulta que: Los diagramas dominantes a bajas densidades son aquellos que contiene el menor número de líneas de con agujeros virtuales. En efecto, a cada línea interior se asocia una integración sobre \mathbf{m} en el dominio $|k| < k_F$, o sea:

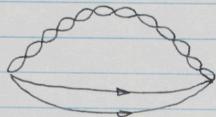
$$g \sim k_F^3$$

Para valores pequeños de k_F podemos decir, haciendo gruesamente, que cada integral sobre un vector \mathbf{m} es aproximadamente igual al volumen de la estrella de Fermi multiplicado por el promedio del integrando. Si sigue que cada integración sobre \mathbf{m} introduce una potencia más de k_F y por lo tanto le corresponde a g .

Consideremos primordialmente la energía del estado base. Es fácil ver que el número mínimo de agujeros es dos:



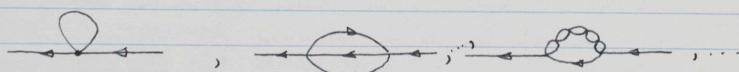
El diagrama más general con dos agujeros es:



El conjunto total que representa todos los aproximaciones de Born es:



Para estados de una partícula: (ahora el número de agujeros es uno); se tienen los diagramas:



o sea:



Para estados de un agujero:



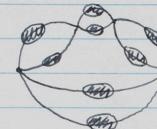
o sea:

Se sigue que, independientemente del estado, tenemos tiene un diagrama básico, del cual podemos construir la serie completa de aproximaciones de Born.

g) La aproximación de Breckner.

La teoría de Breckner es una teoría del tipo autoconcordante, no sistemática y sin diagramas. No permite la discusión de la función de onda.

Para Eo, Breckner considera únicamente contribuciones que en nuestra formulación están representados por diagramas del tipo:



Para estados de una partícula:



(las regiones oscuras representan efectos de autoenergía).

Breckner hace principalmente un estudio autoconcordante de diagramas de una partícula y un agujero para insertarlos después, sus resultados en los diagramas del estado fundamental.

La Teoría de Breckner es una aproximación válida para densidades bajas aunque como aproximación va más allá del orden más bajo. En efecto, esta teoría permite mejorar la aproximación más baja teniendo en cuenta efectos de propagador. Dicho de otro modo, toma en cuenta interacciones de partículas virtuales con el resto de la materia nuclear.

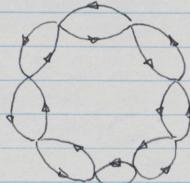
Sin embargo, las conclusiones anteriores muestran que esta manera de proceder no es enteramente consistente. En efecto, si se quiere ir a órdenes superiores en β de manera sistemática, es necesario tomar en cuenta contribuciones de otros diagramas. Todos estos son despreciados en la Teoría de Breckner, lo que la hace una aproximación de baja densidad.

El sucesor de la T. de Breckner debe considerarse como una

en conclusión del hecho de que la materia nuclear es un sistema de relativamente baja densidad.

b) Comentarios sobre el caso de densidades fuertes.

La contribución dominante en el caso de alta densidad se obtiene formalmente de una manera directa a partir de la teoría general. Consiste en tomar para un número de sumandos dado, el número máximo de agujeros virtuales. Esto da lugar a diagramas del tipo:



cuyo orden de magnitud es k_F^n , donde n es el número de sumandos. En general la suma sobre n de tales diagramas para k_F grande da lugar a divergencias, ya que se obtienen potencias más y más elevadas de $k_F \sim g^{\frac{1}{3}}$ cuando se van a órdenes superiores.

Existen sin embargo casos en los que la suma es finita, por ejemplo en un plasma. En este caso, la intuición de que g es grande es equivalente a aquella en que la carga e (esto es, la interacción) es pequeña.

III. Resultados obtenidos en el estudio de la materia nuclear.

- El modelo de partículas independientes y la Teoría de Brueckner. Uno de los aspectos más importantes de la Teoría de Brueckner es que la una justificación del modelo de partículas independientes. En efecto, en este modelo se impone que:

$$E_0 = E_0 + \frac{1}{2} \int_{\text{un}} V_{\text{un}}$$

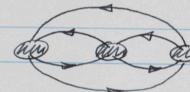
donde V_{un} , que es el potencial medio actuando sobre la partícula en el estado un , es de la forma:

$$V_{\text{un}} = \int_{\text{un}} W_{\text{unun}'}$$

donde $W_{\text{unun}'}$ es la interacción de la partícula en el estado un con la un' . Estas dos fórmulas son fórmulas standard de toda teoría de campo autoconcordante. Los diagramas que Brueckner considera dan a E_0 precisamente esta forma. Sin embargo, recordemos que esta justificación no es más que parcial pues la función de onda $|k\rangle$ es muy diferente de un determinante de ondas planas.

Consideremos ahora el orden de magnitud de los diagramas con un número mayor de líneas de agujeros.

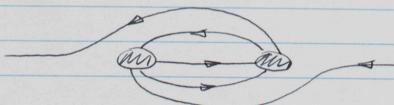
Para E_0 el primer diagrama es despreciable.



(dos agujeros virtuales)

Las estimaciones numéricas de Bethe dan una corrección del orden del 10% al término dominante y la convergencia es buena.

Para estados con una excitación:



(1 partícula)



(1 agujero)

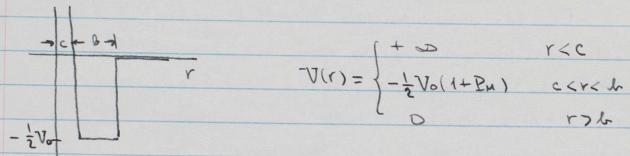
En este caso la corrección es más fuerte (50%. Cf. Hohenboly y Van Hove).

La Teoría de Brueckner resulta entonces buena para el estado fundamental pero mala para estados de una partícula. La razón es que los diagramas del estado fundamental poseen 1, 3, 4, 5, ... agujeros asimétricos, saltando las componentes con 2 que ~~son~~ las que

dan lugar a las correcciones importantes en los estados de una excitación.

b) Resultados numéricos para E_0 .

Weisskopf, Waleckas y Gomes han utilizado una versión radicalmente simplificada de la Teoría de Brueckner a fin de poder hacer cálculos numéricos simples. Usan como interacción el pozo cuadrado:



donde P_M = parámetro de Majorana y:

$$c = 0.4f, \quad b = 2f, \quad V_0 = 30 \text{ Mev.}$$

Encuentran que:

$$E_0 = E_0 + U_C + U_A$$

donde E_0 proviene de la energía cinética y U_C, U_A son las correcciones del centro repulsivo y de la parte atractiva respectivamente.

$$\frac{E_0}{N} \text{ (Mev.)}$$

