

Archivo  
Luis Estrada



## Geometrías Riemanniana y Simpléctica para físicos

Luis Estrada

### Un breve repaso del “Algebra vectorial”

Que  $V$  es un espacio vectorial quiere decir que sus elementos, los vectores, pueden sumarse, así como multiplicarse por un escalar, esto es, que si  $v_1, v_2$  y  $v_3$  son elementos de  $V$ ,  $v_1 + v_2$  y  $cv_3$ , con  $c$  un número real, también lo son.

Supongamos que  $V$  es de dimensión  $n$  y que  $\{\hat{x}_i\}$  es una base. Entonces todo elemento de  $V$  puede escribirse como  $v = x^i \hat{x}_i$ , usando la llamada “convención de Einstein”:

$$x^i \hat{x}_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n x^i \cdot \hat{x}_i.$$

El espacio vectorial dual  $V^*$  es la colección de funciones lineales reales definidas en  $V$ , con las definiciones usuales de “suma de funciones” y “multiplicación de una función por un escalar”. La manera usual de construir este espacio es definiendo la base dual  $\{\hat{\eta}^i\}$  como compuesta por las funciones lineales que satisfacen la relación:

$$\hat{\eta}^i(\hat{x}_j) = \delta_j^i.$$

En términos de esta base los elementos de  $V^*$  se escriben como  $\omega = \eta_i \hat{\eta}^i$  y es importante notar que si  $x = x^i \hat{x}_i$ ,

$$\omega(x) = \eta_i x^i.$$

Si en  $V$  se define un producto escalar, a partir de la forma bilineal simétrica  $g_{ij}$  por ejemplo, como:

$$[x_1, x_2] = g_{ij} x_1^i x_2^j,$$

el espacio dual  $V^*$  puede definirse asociando a cada elemento  $x$  de  $V$  la forma  $\omega_x$ , definida como:

$$\omega_x(y) = [x, y], \quad \text{para todo } y \in V.$$

### La "Geometría riemanniana"

Consideremos el espacio  $R$ , que supondremos de dimensión  $n$ , en el que hay un sistema de coordenadas  $\{x^i\}$  y seleccionemos un punto  $P = (x^i)$ . Consideremos una vecindad de  $P$  tal que no resulte muy exagerado considerarla como llana, esto es, como un pedacito de  $R^n$  con la métrica euclidiana, esto es:

$$\|g_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora a la vecindad de  $P$ , allanada, como un parte del espacio vectorial  $R^n$  y tomemos como base a las direcciones determinadas por el sistema de coordenadas. Llamemos  $\{\partial_i x\}$  a tal base. Los vectores subtendidos por esta base se califican como tangentes y tienen la forma:  $X = A^i \partial_i x$ . Construyamos ahora el espacio dual definiendo la base dual  $\{dx^i\}$  mediante la relación:

$$dx^i(\partial_j x) = \delta_j^i.$$

Los vectores generados por esta base se califican como cotangentes (también se llaman covectores o formas diferenciales) y se expresan como:  $\Omega = \alpha_i dx^i$ . Es claro que

$$\Omega(X) = \alpha_i A^i.$$

Introduciendo el producto escalar mediante la función simétrica  $g_{ij}$ ,

$$[X_1, X_2] = g_{ij}(x) A_1^i A_2^j,$$

se encuentra la forma fundamental:

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j, \quad (R)$$

ya que:

$$ds^2(X_1, X_2) = [X_1, X_2].$$

La ecuación (R), tomada en cada punto del espacio  $R$ , es la que lo "hace riemanniano". La forma fundamental (R), como expresión del producto escalar de los vectores tangentes, permite establecer una correspondencia biunívoca entre vectores y covectores, por lo que, si  $X = A^i \partial_i x$ ,

$$\Omega_X = g_{ij} A^j dx^i.$$

### La "Geometría simpléctica"

Consideremos el espacio  $S$ , que supondremos de dimensión  $2n$ , con un sistema de coordenadas  $\{q^i, p_i\}$ , en el que separamos "notacionalmente" (y sólo para facilitar su uso en la Mecánica Hamiltoniana) la primera mitad de las coordenadas de la segunda mitad. Como en el caso de la geometría riemanniana seleccionemos un punto  $P = (q^i, p_i)$  y consideremos una vecindad que podamos allanar. Nuevamente tomemos a esta vecindad como parte del espacio vectorial  $R^{2n}$  y consideremos los vectores tangentes  $X = A^i \partial_i q + B_i \partial^i p$  y los cotangentes  $\Omega = \alpha_i dq^i + \beta^i dp_i$ . Nótese que ahora  $\Omega(X) = \alpha_i A^i + \beta^i B_i$ .

Definamos el producto escalar simpléctico como:

$$\langle X_1, X_2 \rangle = A_1^i B_2^i - A_2^i B_1^i.$$

La forma fundamental será ahora

$$d\omega = dq^i \wedge dp_i, \quad (S)$$

en la que el producto exterior de los vectores cotangentes  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  se define como la función bilineal que evaluada en los vectores  $X_1$  y  $X_2$  produce:

$$\Omega_1 \wedge \Omega_2(X_1, X_2) = \begin{vmatrix} \Omega_1(X_1) & \Omega_1(X_2) \\ \Omega_2(X_1) & \Omega_2(X_2) \end{vmatrix}.$$

Por lo tanto

$$d\omega(X_1, X_2) = \langle X_1, X_2 \rangle.$$

Así, considerando que la forma (S) está definida en cada punto del espacio  $S$ , se dice que éste es simpléctico. La forma fundamental (S) permite también asociar biunívocamente vectores y covectores si se exige que:

$$d\omega(X, Y) = \Omega_X(Y) \text{ para todo } Y.$$

En este caso, si  $X = A^i \partial_i q + B_i \partial^i p$ ,  $\Omega_X = -B_i dq^i + A^i dp_i$ .