REPRESENTACIONES DE GRUPOS FINITOS CONMUTATIVOS.

V es una rep. unidim. de G, esto es,

$$V_x = \chi(x) I$$

I es el operador idéntico y χ es una función compleja sobre G, distinta de 0. Como V es una representación:

$$\chi(xy) = \chi(x)\chi(y). \quad \text{para todo } x, y \in G.$$

χ es un carácter.

Si χ es un carácter de G y I es el operador idéntico del esp. vect. complejo, $\mathcal{H}$,

$x \to \chi(x) I$ es una representación de G, si y sólo si, $\mathcal{H}$ lo es.

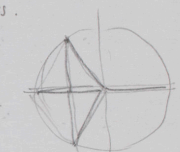
Notese que los caracteres forman un grupo.

$\theta \to e^{in\theta}$

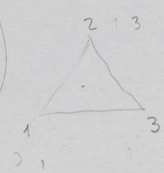
A, B, C.

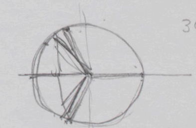
$\boxed{I, A, A^{-1}}$

	A	B	C
A			
B			
C		120.	



	I	A	B
I	I	A	B
A	A	B	I
B	B	I	A





360

$w = e^{ni}$ $\quad n = 0, 120, 240.$

$AB = I$

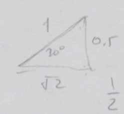
$BA = I$ $\quad \Sigma \quad e \quad 1 + e^{\frac{2\pi}{3}i} + e^{\frac{4\pi}{3}i} = 0$

$1 - \text{sen}\,30 - \text{sen}\,30 + i(\cos 30 - \cos 30) =$

$1 - 2\,\text{sen}\,30^\circ = 1 - \sqrt{2} \neq 0$

$\cos 120 = -\text{sen}\,30$ $\quad \cos 240 = -\text{sen}\,30.$

$\text{sen}\,120 = \cos 30$ $\quad \text{sen}\,240 = -\cos 30.$



$x^2 + \frac{1}{4} = 1.$

$x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$1 \quad \Sigma\, e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

$\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3 \times 2\pi}{3} = 0 \quad \chi(x) = e^{i\cancel{n}x}$

$1 + 2$

$f = \Sigma c_n e^{inx}$ $\quad \begin{pmatrix} 1, 0 \\ -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$\cancel{\chi_n(x) = e}^{inx}.$ $\quad n = 1,2,3 \quad i\frac{2\pi}{3}n$

$$\chi_n(x) = e^{i\frac{2\pi}{3}n}$$

$$\chi_0(x) = 1. \qquad \chi_1(x) = e^{i\frac{2\pi}{3}x} = \cos\frac{2\pi}{3}x + i\sin\frac{2\pi}{3}x$$

$$f : G \to \mathbb{C} \qquad f : G \to \mathbb{C}$$

$$V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}. \qquad V : \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

$$V(s) = \chi(x)\, s$$

$$s = \sum_n P_n(s) = \cancel{(1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1)} = \sum_n c_n \chi_n(s)$$

$$\overline{\chi_{n'}}(s) = \sum_n c_n \overline{\chi_{n'}}(s)\chi_n(s) = c_{n'}$$

$$c_n = \overline{\chi}_n(s) \qquad s = \sum_n$$

$$P_x s = \frac{1}{O(G)} \sum_{x \in G} \overline{\chi(x)}\, \overline{V}_x = \frac{1}{3} \sum \overline{\chi}(x)\chi(x)\, s$$

$$s = \sum_{G,\hat{G}} P_x(s) = \underbrace{\frac{1}{3} \sum_{G\hat{G}} \overline{\chi}(x)\chi(x)\, s}$$

$$\sum_{G\hat{G}} \overline{\chi}(x)\chi(x) = 3.$$

$$\sum_G |\chi|^2 =$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & 0 \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

MECANICA CLÁSICA

Consideremos un sistema mecánico de n grados de libertad. Construyamos el espacio de configuración E. Este es una variedad diferenciable de dimensión n. A partir de este construyamos el espacio físico. Este es el haz cotangente de E: $M = T^*(E)$. Este tiene una estructura simpléctica natural. ω. En coordenadas: $\omega = \sum_i p_i\, dq_i$. Esta es cerrada ($d\omega = 0$)

$S, \mu, G \qquad \mathcal{H} = \mathcal{L}^2(S,\mu). \qquad U : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \qquad \mathcal{R} = \{U\}.$

$L : G \to \mathcal{R} \qquad \mathcal{H}(L)$

$\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ invariante (subgrupo).

$L^{\mathcal{M}}$ subrepresentación $\qquad L^{\mathcal{M}\perp} \qquad L = L^{\mathcal{M}} \oplus L^{\mathcal{M}^\perp}$

$\mathcal{R}_L \; \mathcal{R}_M \qquad V : \mathcal{R}_L \to \mathcal{R}_M. \qquad V =$

$\cancel{VL =}$

$\cancel{VL(\varphi)} \qquad V(\varphi)$

$N_V = \{\varphi \mid V(\varphi) = 0\} \qquad N_V \subset \mathcal{H}. \qquad N_V^\perp$

$R_V = \{\psi \mid \psi = V(f)\}. \qquad R_V \subset \mathcal{H}.$

$L^{N_V^\perp} \qquad M^{R_V}$ Representación regular: $\quad \mathcal{H} = \mathcal{L}^2(G,\mu) = \{f\}$

$$\boxed{(U_x f)(y) = f(yx)}$$

Representaciones inducidas. $K_{s_0} = \{x \in G \mid s_0 x = s_0\}$ para $s_0 \in S$ fijo.

Sea S un espacio G. y $\tilde{\mathfrak{F}} = \{g\}$ $\quad g : G \to C$

K_{s_0} es un subgrupo cerrado de G. (grupo de isotropía).

Se define: $f(x) = f(y)$ si y sólo si $s_0 x y^{-1} = s_0$.

$\tilde{\mathfrak{F}}$ satisface:

i) $g(\xi x) = g(x)$ para todo $\xi \in K_{s_0}$ $\quad x \in G$

ii) g es una función boreliana tal que

$$\int_{G/K_{s_0}} |g(x)|^2 \, d\mu(x) < \infty.$$

	1	t
1	1	t
t	t	1

$1 \times t = t$

$t \times 1 = t$

$t \times t = 1$

$\tilde{\mathfrak{F}}$ es un espacio de Hilbert con el producto

$$(g_1, g_2) = \int_{G/K_{s_0}} g$$

(1,3,3)

G, N, H $\quad x \in G$ $\quad x = nh$ $\quad G = NH$

normal.

$a_h(n) = h n h^{-1}$

	1	2	3
1	1	2	3
2	2		
3	3		

$$a_{h_1}(a_{h_2}(n)) = a_{h_1}(h_2 n h_2^{-1}) = h_1 h_2 n h_2^{-1} h_1^{-1} = a_{h_1 h_2}(n).$$

$h \to a_h$

$N \circledast H$ $\qquad (n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1\, a_{h_1}(n_2), h_1 h_2)$ $\qquad 1,1$

$n_1 n_2$ $\qquad N = \{1, 2, 3\}$ $\quad H = \{1, t\}$.

$a_h(n) = n$ si $h = 1$.

$a_h(n) = n^{-1}$ si $h \neq 1$

	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	2					
3						
4						
5						
6						

$(1, 1)(1, 1) = 1, 1$

$(1, 2)\ (1, 1) = (1, 2)$

$(1, 3)\ (1, 1) = (1,$

espacio S

grupo de simetrías G.

$T: G \times S \to S$

G "preserva" ciertas características de S.

Si la identidad es "mayor" que la aplicación de $1 \in G$. el grupo de transf. es el cociente

$$G/N$$

donde N es el subgrupo de isotropía de G.

Sea $\tilde{\mathcal{F}} = \{f\}$ $\quad f: S \to C$ $\quad \tilde{\mathcal{F}}$ es invariante bajo G.

Entonces para cada $x \in G$ se define $V_x : \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{F}}$.

V_x es un grupo de transf. unitarias y $x \to V_x$ una representación de G. Hay un homomorfismo de G y $\mathfrak{h}(V)$.

Análisis armónico descompone $\tilde{\mathcal{F}}$ en subespacios M_λ tales que

$$\tilde{\mathcal{F}} = \sum_\lambda M_\lambda.$$

1- $V_x(M_\lambda) = M_\lambda$ para todo x y λ (invariantes).

2- Cualquier elemento $f \in \tilde{\mathcal{F}}$ puede escribirse como:

$$f = \sum f_\lambda \qquad f_\lambda \in M_\lambda.$$

3 - M_λ son irreducibles.

Explicarlo esto para:

1- Grupos finitos conmutativos
2- " " no conmutativos.
3- " compactos.
4- Productos semidirectos de grupos.

Teoría de las representaciones continuas y unitarias de grupos ~~separables localmente~~ compactos.

G es finito y conmutativo. $\chi(x) \in \mathbb{C}$ $(\neq 0)$.

$V_x = \chi(x) I$ $\qquad \{\chi\} = \hat{G}$

grupo de los caracteres.

P_χ es un operador (proyector) tal que.

$P_\chi^2 = P_\chi$ para todo $\chi \in \hat{G}$.

$P_{\chi_1} P_{\chi_2} = P_{\chi_2} P_{\chi_1} = 0$ si $\chi_1 \neq \chi_2$.

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} P_\chi = 1$$

$V_x P_\chi = \chi(x) P_\chi$ para todo x y χ.

cualquier φ definida en G. se descompone.

$$\varphi = \sum_{\chi \in \hat{G}} P_\chi(\varphi).$$

representaciones unidimensionales

GRUPOS Y MECÁNICA CUÁNTICA.

1- Representaciones.

Una representación es un homomorfismo de un grupo sobre un grupo de matrices. Así, a cada elemento A del grupo corresponde una matriz D(A) tal que:

$$D(A)\,D(B) = D(AB)$$

Si la correspondencia es 1-1, ambos grupos son isomorfos y se dice que la representación es fiel.

La representación trivial consiste en asignar a todo elemento de un grupo la matriz unidad.

La dimensión de la representación es la de las matrices.

Dos representaciones son equivalentes si difieren por una transformación de semejanza.

Dadas dos representaciones es posible construir una con ellas; por ejemplo, el producto directo de dos representaciones es una representación. Recíprocamente, es posible, mediante transformaciones de semejanza, reducir una representación a un producto directo. Si esto no es posible, la representación se llama irreducible.

Teorema 1. Cualquier representación puede realizarse mediante matrices unitarias.

Teorema 2. Una matriz que conmuta con todas las matrices de una representación irreducible es constante (esto es, es un múltiplo de la matriz unidad). (Lema de Schur).

Recíprocamente: Si existe una matriz no constante que conmuta con todas las matrices de una representación, entonces ésta es reducible.

Teorema 3. Sean $D^{(1)}(A_1), \ldots, D^{(1)}(A_h)$ y $D^{(2)}(A_1), \ldots, D^{(2)}(A_h)$ dos representaciones de dimensiones l_1 y l_2, respectivamente, de un grupo. Si existe una matriz M $(l_2 \times l_1)$, tal que

$$M D^{(1)}(A_j) = D^{(2)}(A_j) M \quad , \quad j = 1, \ldots, h,$$

entonces $M = 0$ si $l_1 \neq l_2$ y M es nula o su determinante no nulo si $l_1 = l_2$. En este último caso las representaciones son equivalentes.

Teorema 4. Sean $D^{(j)}(A_k)$ ($j = \cancel{1,2}\ 1,\ldots,c$ y $k = 1, \ldots, h$), ~~los~~ representaciones de dimension l_j, no equivalentes, irreducibles y unitarias de un grupo. Entonces

$$\sum_{A} \frac{\sqrt{l_j l_{j'}}}{h} D^{(j)}(A)_{\mu\nu} D^{(j')}(A)_{\mu'\nu'} = \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}$$

$(\mu, \nu = 1, \ldots, l_j \ , \ \mu', \nu' = 1, \ldots, l_{j'} \ , \ j, j' = 1, \ldots, c)$ (Teorema de ortogonalidad).

y:

$$l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_c^2 = h \ .$$

Los vectores de dimensión h $\quad \vec{V}_A^{(j,\mu,\nu)} = D^{(j)}(A)_{\mu\nu}$ son orto~~gonales~~normales.

De aquí se definen los caracteres: (trazas de la matrices $D^{(j)}(A)$).

$$\chi^{(j)}(A) = \sum_{\mu=1}^{h} D^{(j)}(A)_{\mu\mu}$$

Éstos son invariantes frente a transformaciones de semejanza y el teorema de ortogonalidad asegura que:

$$\sum_{A} \chi^{(j)}(A) \chi^{(j')}(A)^{*} = h\, \delta_{jj'}$$

Los caracteres $\chi^{j}(R)$ de una representación forman un sistema ortogonal de vectores en el espacio de los elementos del grupo.

Nótese que dos representaciones irreducibles no equivalentes tienen caracteres no equivalentes. Los elementos de una misma clase (esto es aquellos que difieren por una transformación de semejanza) tienen caracteres iguales.

Si hay g_ρ elementos en la clase C_ρ, los caracteres normalizados:

$$\sqrt{\frac{g_\rho}{h}}\, \chi^{(j)}(C_\rho)$$

forman un sistema ortonormal de vectores en el espacio de dimensión k de las clases

Si una representación $D(R)$ puede expresarse como.

$$\begin{pmatrix} D^{(1)}(R) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D^{(2)}(R) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & D^{(s)}(R) \end{pmatrix}$$

en donde la $D^{(j)}(R)$ son representaciones irreducibles, se dice que $D(R)$ ha sido reducida y se escribe:

$$D(R) = \sum_{j=1}^{c} \oplus\, a_j D^{(j)}(R)$$

donde a_j es el número de veces que aparece la representación $D^{(j)}$. Claramente:

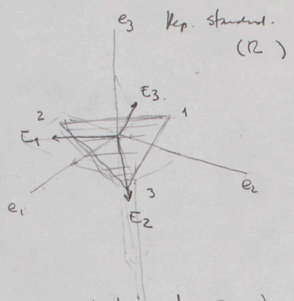
$$\chi(R) = \sum_{j=1}^{c} a_j\, \chi^{(j)}(R)$$

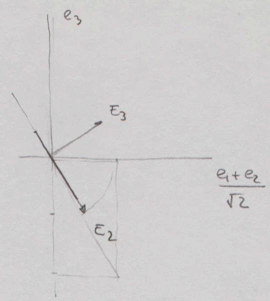
y de la ortonormalidad de los caracteres:

$$a_j = \frac{1}{h} \sum_{R} \chi(R) \chi^{(j)}(R)^{*}$$

Nótese que el número de veces que aparece una representación irreducible en la forma reducida de una representación ~~es independiente~~ está determinado por el carácter de la representación. Las componentes irreducibles son independientes del método empleado para reducir una representación.

La igualdad de caracteres es una condición necesaria y suficiente para la equivalencia de las representaciones.





$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Tabla de caracteres:

	1	t	t^2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	w	w^2
χ_3	1	w^2	w

Sus conjugados son:

	1	t	t^2
$\bar{\chi}_1$	1	1	1
$\bar{\chi}_2$	1	w^2	w
$\bar{\chi}_3$	1	w	w^2

Nota: $\sum_G \chi_i(x)\bar{\chi}_j(x) = 0$ si $i \neq j$ ya que $1+w+w^2=0$.

y $\sum_G |\chi_i(x)|^2 = 3$

Tabla de multiplicación de caracteres:

$$\begin{matrix} \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 \\ \chi_2 & \chi_3 & \chi_1 \\ \chi_3 & \chi_1 & \chi_2 \end{matrix}$$

GRUPOS DE ORDEN PEQUEÑO

1 – Grupos de orden 1.

El grupo de la identidad: $T_1 = \{1\}$
Es el trivial y su representación irreducible es la trivial.

2 – Grupos de orden 2.

El grupo cíclico de orden 2: $T_2 = \{1, t\}$. Su tabla de multiplicación es:

$$\begin{matrix} 1 & t \\ t & 1 \end{matrix}$$

Tiene dos clases de representaciones irreducibles (ambas de grado 1) que son: $R_1(t) = 1$ $\quad R_2(t) = 1$.

3 – Grupos de orden 3

El grupo cíclico de orden 3: $T_3 = \{1, t, t^2\}$. Su tabla de multiplicación es:

$$\begin{matrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & 1 \\ t^2 & 1 & t \end{matrix}$$

Sus representaciones irreducibles, de grado 1, son:

$$R_1(t) = 1, \quad R_2(t) = w, \quad R_3(t) = w^2$$

en donde: $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

4 – Grupos de orden 4

i) El grupo cíclico de orden 4: $T_4 = \{1, t, t^2, t^3\}$. Su tabla de multiplicación es:

$$\begin{matrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & t^2 & t^3 & 1 \\ t^2 & t^3 & 1 & t \\ t^3 & 1 & t & t^2 \end{matrix}$$

Sus representaciones irreducibles son:

$R_1(t) = 1 \qquad R_i(t) = i \qquad R_{-1}(t) = -1 \qquad R_{-i}(t) = -i$

ii). El grupo cuatro (Klein): $V = T_2 \times T_2 = \{(1,1), (t,1), (1,t), (t,t)\}$. Su tabla de multiplicación es:

v_0	v_1	v_2	v_3
v_1	v_0	v_3	v_2
v_2	v_3	v_0	v_1
v_3	v_2	v_1	v_0

Sus representaciones irreducibles, de grado 1, son:

	$(1,1)$	$(t,1)$	$(1,t)$	(t,t)
$R(1,1)$	1	1	1	1
$R(t,1)$	1	-1	1	1
$R(1,t)$	1	1	-1	1
$R(t,t)$	1	-1	-1	1

5- Grupos de orden 5

El grupo cíclico de orden 5: $T_5 = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$. Su tabla de multiplicación es:

1	t	t^2	t^3	t^4
t	t^2	t^3	t^4	1
t^2	t^3	t^4	1	t
t^3	t^4	1	t	t^2
t^4	1	t	t^2	t^3

Sus representaciones irreducibles son cinco, de grado 1, dadas por:

$R_{t_k}(t) = z^k$

en donde $z = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ y $0 \leq k \leq 4$

6- Grupos de orden 6

i) El grupo cíclico de orden 6: $T_6 = \{1, t, t^2, t^3, t^4, t^5\}$ cuya tabla de multiplicación es:

1	t	t^2	t^3	t^4	t^5
t	t^2	t^3	t^4	t^5	1
t^2	t^3	t^4	t^5	1	t
t^3	t^4	t^5	1	t	t^2
t^4	t^5	1	t	t^2	t^3
t^5	1	t	t^2	t^3	t^4

Tiene 6 clases de representaciones irreducibles, de orden 1, dadas por:

$R_{t_k}(t) = x^k$

en donde $x = e^{\frac{\pi i}{3}}$ y $0 \leq k \leq 5$

ii) El grupo diedrico D_3 (que en este caso coincide con el simétrico S_3) y es el no conmutativo de menor orden. Su tabla de multiplicación es:

1	t	t^2	s	st	st^2
t	t^2	1	st^2	s	st
t^2	1	t	t	st^2	s
s	st	st^2	1	t	t^2
st	st^2	s	t	1	t
st^2	s	st	t^2	t	1

Sus representaciones irreducibles son: (dos de grado 1 y una de grado 2).

	t	s
R'	1	1
R''	1	-1
S	$\begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^* \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

7- Grupos de orden 7

El grupo cíclico de orden 7: $T_7 = \{1, t, \ldots, t^6\}$. Su tabla de multiplicación es:

1	t	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6
t	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6	1
t^2	t^3	t^4	t^5	t^6	1	t
t^3	t^4	t^5	t^6	1	t	t^2
t^4	t^5	t^6	1	t	t^2	t^3
t^5	t^6	1	t	t^2	t^3	t^4
t^6	1	t	t^2	t^3	t^4	t^5

Sus representaciones irreducibles son ocho, de grado 1, dadas por:

$$R_{t^k}(t) = y^k$$

donde $y = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ y $0 \le k \le 6$.

8- Grupos de orden 8

i) El grupo cíclico de orden 8: $T_8 = \{1, t, \ldots, t^7\}$. Tiene ocho clases de representaciones irreducibles, de grado 1, dadas por:

$$R_{t^k}(t) = q^k$$

en donde $q = e^{\frac{\pi i}{4}}$ y $0 \le k \le 7$.

ii) El grupo: $T_2 \times T_4 = \{(1,1), (1,s), (1,s^2), (1,s^3), (t,1), (t,s), (t,s^2), (t,s^3)\}$

Sus representaciones irreducibles son:

	$(t,1)$	$(1,s)$
$R_{(1,1)}$	1	1
$R_{(1,s)}$	i	1
$R_{(1,s^2)}$	-1	1
$R_{(1,s^3)}$	$-i$	1
$R_{(t,1)}$	1	-1
$R_{(t,s)}$	i	-1
$R_{(t,s^2)}$	-1	-1
$R_{(t,s^3)}$	$-i$	-1

iii) El grupo: $T_2 \times T_2 \times T_2 = \{(1,1,1), (1,1,t), (1,t,1), (1,t,t), (t,1,1), (t,1,t), (t,t,1), (t,t,t)\}$

Sus representaciones irreducibles son:

	$(t,1,1)$	$(1,t,1)$	$(1,1,t)$
$R_{(1,1,1)}$	1	1	1
$R_{(1,1,t)}$	1	1	-1
$R_{(1,t,1)}$	1	-1	1
$R_{(1,t,t)}$	1	-1	-1
$R_{(t,1,1)}$	-1	1	1
$R_{(t,1,t)}$	-1	1	-1
$R_{(t,t,1)}$	-1	-1	1
$R_{(t,t,t)}$	-1	-1	-1

iv) El grupo diedrico D_4. (las simetrías del cuadrado.)

$$D_4 = \{1, t, t^2, t^3, s, st, st^2, st^3\}.$$

Sus representaciones irreducibles son: cuatro de grado 1 y una de grado 2.

	t	s
R'_1	1	1
R''_1	1	-1
R'_{-1}	-1	1
R''_{-1}	-1	-1
R_2	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

v) El grupo de los cuaternios: $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.

Su tabla de multiplicación está dada por las reglas:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$\therefore\ ij = -ji = k, \ldots$$

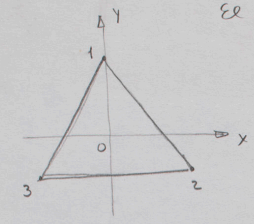
Puede darse mediante la tabla de Cayley:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	1	6	7	8	5
3	4	1	2	7	8	5	6
4	1	2	3	8	5	6	7
5	8	7	6	3	2	1	4
6	5	8	7	4	3	2	1
7	6	5	8	1	4	3	2
8	7	6	5	2	1	4	3

Sus representaciones irreducibles son, cuatro de grado 1 y una de grado 2, dadas por la tabla.

	± 1	$\pm i$	$\pm j$	$\pm k$
R_1	1	1	1	1
R_i	1	1	−1	−1
R_j	1	−1	1	−1
R_k	1	−1	−1	1
T	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

Nota: aquí $i = \sqrt{-1}$



El grupo $C_{3v} = \{E, C_3, C_3^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ (orden 6).

Operaciones:

E identidad

C_3 rotación (neg) 120°

C_3^2 ✓ ✓ 240°

σ_1 reflexión eje Y

σ_2 ✓ eje 02

σ_3 ✓ ✓ 03.

Tabla de multiplicación

E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3	C_3^2	E	σ_3	σ_1	σ_2
C_3^2	E	C_3	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_2	σ_3	E	C_3	C_3^2
σ_2	σ_3	σ_1	C_3^2	E	C_3
σ_3	σ_1	σ_2	C_3	C_3^2	E

$S = \{E, C_3, C_3^2\}$ forman un subgrupo.

También son subgrupos $\{E, \sigma_1\}$, $\{E, \sigma_2\}$ y $\{E, \sigma_3\}$.

Clases laterales: derechas $\sigma_1 S = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ $(= \sigma_2 S = \sigma_3 S)$.

izquierdas $S\sigma_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ $(= S\sigma_2 = S\sigma_3)$

∴ S es invariante

∴ Grupo factor $C_{3v}/S = \{S, \sigma_1 S\}$

Serie de composición: $C_{3v} \supset S \supset E$

Las clases de C_{3v} son (3).

$\{E\}$, $\{C_3, C_3^2\}$, $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

El grupo C_{3v} es isomorfo al de permutaciones: las llamamos:

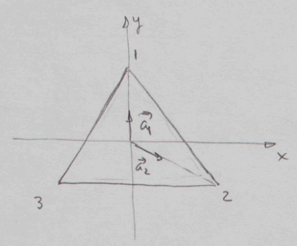
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$

o bien a las matrices:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(recordando: $\operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ | $\operatorname{sen} 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 240° = -\frac{1}{2}$) que llamamos $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$

Representación de C_{3v}.



Considerando los vectores $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ como base de una representación, se obtiene:

$$\Gamma(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Gamma(C_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(C_3^2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Gamma(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta es una representación fiel.

Otra representación es:

$$\Gamma'(E) = M_1 \quad \Gamma'(C_3) = M_2 \quad \Gamma'(C_3^2) = M_3 \quad \Gamma'(\sigma_1) = M_4 \quad \Gamma'(\sigma_2) = M_5 \quad \Gamma'(\sigma_3) = M_6$$

Estas son unitarias y están relacionadas con la anterior mediante una transformación de semejanza

$$\Gamma'(R) = S^{-1}\,\Gamma(R)\,S$$

en donde: $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \left(S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$

Otra representación es la trivial:

$$\Gamma(E) = \Gamma(C_3) = \dots = \Gamma(\sigma_3) = (1)$$

Otra más unidimensional es:

$$\Gamma(E) = \Gamma(C_3) = \Gamma(C_3^2) = (1)$$
$$\Gamma(\sigma_1) = \Gamma(\sigma_2) = \Gamma(\sigma_3) = (-1).$$

Nota que no son equivalentes. Son irreducibles (como todas las unidimensionales).

La otra representación irreducible de C_{3v} es la de las matrices M (si fueran reducibles sería de matrices diagonales pero estas conmutan; ¡contradicción!)

Por lo tanto las representaciones irreducibles son:

	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
$\Gamma_1(R)$	1	1	1	1	1	1
$\Gamma_2(R)$	1	1	1	-1	-1	-1
$\Gamma_3(R)$	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6

Nota: son todas y son unitarias $\left((1)^2 + (1)^2 + (2)^2 = 6 \right)$

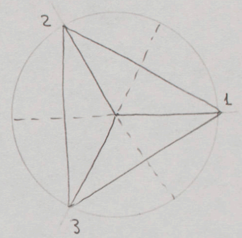
La tabla de caracteres de C_{3v} es:

	E	C_3, C_3^2	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$
Γ_1	1	1	1
Γ_2	1	1	-1
Γ_3	2	-1	0

El grupo diédrico de grado 3

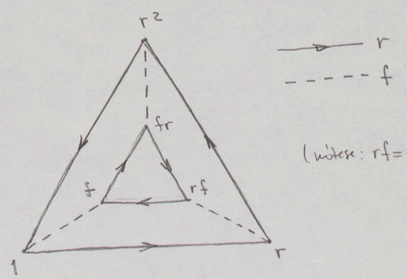
El grupo diédrico de grado 3, D_3, es de orden 6 y coincide con el simétrico de tres elementos, S_3. Es el grupo de simetrías del triángulo y sus elementos son:

	D_3:	S_3
E	identidad. (1)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
D	rotación de $+\frac{2\pi}{3}$ rad. (r)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
F	rotación de $+\frac{4\pi}{3}$ rad (r^2)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
A	reflexión respecto al eje 1 (f)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
B	reflexión respecto al eje 2 (fr)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
C	reflexión respecto al eje 3 (fr^2)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$



Su tabla de multiplicación y su gráfica son:

E	D	F	A	B	C
D	F	E	C	A	B
F	E	D	B	C	A
A	B	C	E	D	F
B	C	A	F	E	D
C	A	B	D	F	E



(nótese: $rf = fr^2$)

Los subgrupos de D_3 son:

El trivial $\{E\} = 1$

El diédrico de grado 1 (reflexiones respecto al eje 1): $\{E, A\} = D_1$

El cíclico de orden 3 (rotaciones) $\{E, D, F\} = C_3$

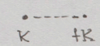
Este es un subgrupo normal y coincide con el alternante de orden 3, A_3.

D_3 puede considerarse generado por los elementos r y f que satisfacen las reglas:

$$f^2 = r^3 = 1$$
$$frf = r^2$$

D_3 puede considerarse formado por C_3 y la clase lateral fC_3 y el grupo factor $D_3/C_3 = \{C_3 = K, fC_3 = fK\}$ es isomorfo a C_2. Su tabla de multiplicación y su gráfica son:

K	fK
fK	K



Construyamos las representaciones de D_3.

1 – Las representaciones estándard.

Sea S el conjunto de tres elementos $\{a, b, c\}$. Este se convierte en un espacio G mediante la acción de D_3 definiendo $D_3 \times S \to S$ mediante: $(g, s) \mapsto gs \in S$. Formemos el espacio vectorial $V(S) = \{f \mid f: S \to \mathbb{C}\}$ donde $\mathbb{C}$ es el campo de los números complejos. Este es tridimensional y permite la acción de D_3 sobre S a una transformación lineal R en $V(S)$ mediante la fórmula:

$$(R(g)f)(s) = f(gs).$$

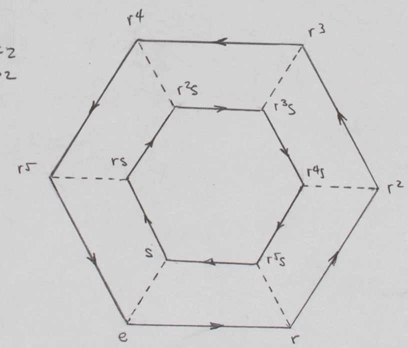
R es la representación estandard de D_3 en $V(S)$

TABLA DE MULTIPLICACIÓN DEL GRUPO D_6

	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s
e	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	e	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s	s
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	e	r	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s	s	rs
r^3	r^3	r^4	r^5	e	r	r^2	r^3s	r^4s	r^5s	s	rs	r^2s
r^4	r^4	r^5	e	r	r^2	r^3	r^4s	r^5s	s	rs	r^2s	r^3s
r^5	r^5	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5s	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s
s	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	e	r^5	r^4	r^3	r^2	r
rs	rs	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	r	e	r^5	r^4	r^3	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2	r	e	r^5	r^4	r^3
r^3s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4s	r^3	r^2	r	e	r^5	r^4
r^4s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4	r^3	r^2	r	e	r^5
r^5s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5	r^4	r^3	r^2	r	e

Note:

$D_6 \simeq D_3 \times \mathbb{Z}_2$
$\simeq S_3 \times S_2$



Note: $\begin{cases} (rs)^2 = e \\ sr = r^5s \end{cases}$

SUBGRUPOS DE D_6:

$\{e\} = 1$, $\{e, s\} = \mathbb{Z}_2 = S_2$ $\{e, r^3\} = \mathbb{Z}_2$, $\{e, r^2, r^4\} = C_3$,

$\{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5\} = C_6$, $\{e, r^2, r^4, s, r^2s, r^4s\} = D_3 = S_3$

$\mathbb{Z}_2$ y D_3 son normales

CLASES CONJUGADAS DE D_6

$\{e\}$, $\{r, r^5\}$, $\{r^2, r^4\}$, $\{r^3\}$, $\{s, r^2s, r^4s\}$, $\{rs, r^3s, r^5s\}$

$D_6/\mathbb{Z}_2 \simeq D_3$, $D_6/D_3 \simeq \mathbb{Z}_2$ $\quad$ ($D_6 = D_3 \cup rD_3$
$= \mathbb{Z}_2 \cup r\mathbb{Z}_2 \cup r^2\mathbb{Z}_2 \cup s\mathbb{Z}_2 \cup rs\mathbb{Z}_2 \cup r^3\mathbb{Z}_2$,
$\mathbb{Z}_2 = \{e, r^3\}$

SOBRE LA EVOLUCIÓN DEL ANÁLISIS ARMÓNICO NOCONMUTATIVO

1 – El análisis armónico clásico: la serie de Fourier

$f : S^1 \to \mathbb{C}$ $\quad$ (f es L^2)

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{in\theta} \qquad (A)$$

con
$$c_n = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Se emplea el producto:
$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) \overline{f_2}(\theta) d\theta.$$

Hay dos interpretaciones:

i) (A) es el desarrollo de f en funciones propias del Laplaciano:
$$\Delta e_n = -n^2 e_n \qquad \left(\Delta = \frac{d^2}{d\theta^2}\right)$$

ii) (A) es el desarrollo de f en términos del grupo dual. (representaciones irreducibles).
($\mathbb{Z}$ es el dual de S^1)

2 – El análisis armónico algebraico: las representaciones de los grupos finitos.

Consideremos el grupo simétrico de grado 3 (orden 6) S_3; sus representaciones irreducibles son:

	1	$(1,2)$	$(2,3)$	$(3,1)$	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
D^1	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)
D^2	(1)	(-1)	(-1)	(-1)	(1)	(1)
D^3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

$$R \simeq \sum_{i=1}^{3} \oplus D^i$$

3 – Análisis armónico compacto: el Teorema de Peter-Weyl.

Sea G un grupo topológico compacto, $L^2(G)$ el espacio de Hilbert de las funciones cuadráticamente integrables definidas en G. Existen subespacios $\mathcal{E}_\lambda(G)$ (representaciones irreducibles) tales que:

$$L^2(G) = \sum_{[\lambda] \in \hat{G}} \mathcal{E}_\lambda(G)$$

($\hat{G}$ es el objeto dual de G – clases de equivalencia $[\lambda]$ de las representaciones irreducibles de $\mathcal{E}_\lambda$ de G –)

En términos de análisis de Fourier, el Teorema de Peter-Weyl establece que:

$$f(x) = \sum_{[\lambda]\in\hat{G}} d_\lambda \sum_{i,j=1}^{d_\lambda} \hat{f}_{ij}(\lambda)\, \lambda_{ij}(x)$$

donde:

$$\hat{f}_{ij}(\lambda) = \langle f, \lambda_{ij}\rangle = \int_G f(x)\, \overline{\lambda_{ij}}(x)\,dx$$

(d_λ es el grado de la representación λ_{ij})

4- El análisis armónico y las funciones especiales: los armónicos esféricos.

Ejemplo 1: Sea el grupo $SO(2)$ (matrices $\begin{pmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$) actuando en $\mathbb{R}^2$

$xg = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta,\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$. S^1 es la órbita de $(1,0)$ por $SO(2)$. Consideremos $f \in L^2(S^1)$. El espacio $L^2(S^1)$ se descompone como:

$$L^2(S^1) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus H_n$$

en donde H_n son espacios propios del laplaciano $\frac{d^2}{d\theta^2}$ $\left(\frac{d^2 f}{d\theta^2} = -n^2 f\right)$. De aquí:

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)$$

Nota: $R(g)\Delta = \Delta R(g)$ (el laplaciano conmuta con las representaciones de $SO(2)$)

Ejemplo 2: $S^2 \cong SO(3)/SO(2)$. La esfera unitaria es la órbita de $(0,0,1)$ por $SO(3)$

El laplaciano en la esfera es:

$$\Delta = \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

y sus espacios propios H_n tienen valores propios $-n(n+1)$ y dimensión $2n+1$. El espacio $L^2(S^2)$ se descompone como:

$$L^2(S^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus H_n$$

5- Análisis clásico en espacios no compactos: la integral de Fourier.

La transformada de Fourier se define como:

$$\hat{f}(\lambda) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\,dx$$

y f se recupera mediante la fórmula de inversión:

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

$\mathbb{R}$ con la adición es un grupo abeliano localmente compacto; la representación regular R de $\mathbb{R}$ en $L^2(\mathbb{R})$, definida por:

$$(R(a)f)(x) = f(x+a)$$

es unitaria. Las funciones $e^{i\lambda x}$ cubren todo el grupo dual (homomorfismos continuos de $\mathbb{R}$ en S^1) El espacio $L^2(\mathbb{R})$ no tiene subespacios invariantes irreducibles. Sin embargo, existe la descomposición (integral-directa):

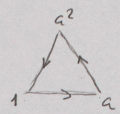
$$L^2(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{C}\, e_\lambda\, d\lambda$$

donde $\Delta e_\lambda = -\lambda^2 e_\lambda$ y $\Delta = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} (-\lambda^2)\, d\lambda$

Sea G un grupo cíclico de orden 3. Si a es un generador; la tabla de multiplicación puede escribirse como

1	a	a^2
a	a^2	1
a^2	1	a

y un gráfico:



Si a a le asociamos la matriz.

$$a \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R$$

obtenemos una representación de grado 3 de G. Si le asociamos la matriz

$$a \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \end{pmatrix} = S$$

donde $w = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ (raíz cúbica primitiva de la unidad) obtenemos otra representación de G de grado 3. Ambas son equivalentes ya que

$$S = ARA^{-1}$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix}$ $\left(\det A = (1-w)(w-w^2)(w^2-1) \neq 0 \right).$

La representación $1, a \cdot 1, a^2 1$ es unidimensional y es irreducible. Los caracteres son:

$\chi_1 = 1 \quad \chi_2 = a \quad \chi_3 = a^2$

Notese:
$$\sum_{x \in G} \chi(x) = 0 \qquad y \qquad \sum_{x \in G} \chi(x) \bar{\chi}(x) = 3.$$

Otra construcción de G:

$R_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ $R_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$

R_1	R_2	R_3
R_2	R_3	R_1
R_3	R_1	R_2

Elementos del algebra de G:

$R_1 = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $R_3 = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

O sea, alternativamente: $(1,0,0) = R_1$ $(0,1,0) = R_2$ $(0,0,1) = R_3$. Este espacio es isomorfo a C^3 y esta es su base natural. El elemento general es

$$f = \sum_{s \in G} f(s) R_s \qquad y \qquad [R_i R_j](s) = \sum_{t \in G} R_i(st^{-1}) R_j(t).$$

Nótese: $R_i R_j = R_k$ donde $S_i S_j = S_k$.

La representación regular $\mathcal{R}$ de G (homomorfismo de G en $GL(CG)$) se puede encontrar mediante la multiplicación izquierda: (algebra de G.)

$$\mathcal{R}(gg') = \mathcal{R}(g)\mathcal{R}(g')$$

∴ está dada por la ...!!

$M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $M(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $M(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ya que:
$$R_i R_j = R_{iL}(R_j) = \sum_{k=1}^{3} M(i)_{kj} R_k$$

$$\sum_{k=1}^{3} M(i)_{kj} R_k = M(i)_{1j} R_1 + M(i)_{2j} R_2 + \qquad R_1 R_2 = R_2$$

$$M(1)_{\cancel{12}} R_1 + M(1)_{2j} R_2 + M(1)_{3j} R_3$$

Sea S^2 la esfera de dimensión 2 y $SO(3)$ el grupo de rotaciones.
Sea $L^2(S^2)$ el espacio de Hilbert de funciones cuadráticamente integrables sobre S^2.

$$f = \sum_{lm} C_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

GRUPO $SL(2,C)$

Conjunto de matrices complejas 2×2 unimodulares, esto es

$$g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} \in C \quad y \quad \det g = 1.$$

Es semisimple, localmente compacto, simplemente conexo y de dimensión 6.

Sus subgrupos más importantes son:

SU_2 (matrices complejas 2×2 unitarias: $g^{+} = g^{-1}$)

$SU(1,1)$ (matrices complejas 2×2 unimodulares de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b^{*} & a^{*} \end{pmatrix}$)

$SL(2,R)$ (matrices reales 2×2 con determinante 1)

Z (matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$)

El grupo de las matrices triangulares: $\begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\phi} & 0 \\ \mu e^{-\frac{i}{2}\phi} & e^{\frac{i}{2}\phi} \end{pmatrix}$ con μ complejo y ϕ real $0 \leq \phi \leq 4\pi$

Las llamadas representaciones espinoriales en el espacio de polinomios P_{mn} ~~(dimensión $(m+1)(n+1)$)~~ son de dimensión finita $[(m+1)(n+1)]$, irreducibles, y no unitarias.

P_{mn} es el conjunto de todos los polinomios en z y $\bar{z}$ de grado máximo m en z y n en $\bar{z}$ (n y m enteros no negativos).

$SL(2,C)$ actúa naturalmente en un espacio bidimensional complejo V con elementos $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$: $u' = gu$. Además puede actuar en un segundo espacio vectorial $\dot{V}$ de elementos $\dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix}$ de acuerdo con: $\dot{u}' = g^{+}\dot{u}$. Como $\det g = 1$, $\dot{V}$ y V tienen una estructura simpléctica $(u,v) = u_1 v_2 - u_2 v_2 = \epsilon^{\alpha\beta} u_{\beta} v_{\beta}$ y $(\dot{u},\dot{v}) = \dot{u}_1 \dot{v}_2 - \dot{u}_2 \dot{v}_1 = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \dot{u}_{\dot{\alpha}} \dot{v}_{\dot{\beta}}$ con productos escalares antisimétricos invariantes. Esto permite definir las componentes contravariantes $u^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} u_{\beta}$ y las correspondientes para $\dot{u}$. Un espinor de rango (k,l) es simétrico en los k índices y l índices punteados. Es irreducible. El espacio lineal de tales espinores es $(k+1)(l+1)$ dimensional y es el de los polinomios antes citados.

Álgebra de Lie: $sl(2,C) = \{$ matrices complejas 2×2 de traza $0\}$.

REPRESENTACIONES DE $SL(2,C)$.

$$SL(2,C) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha,..,\delta \in C \;\; y \;\; \det g = 1 \right\} \qquad (\text{dim}: 6).$$

1. $SL(2,C)$ y sus diferentes realizaciones.

$$a = \begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_2 - i x_1 \\ x_2 + i x_1 & x_0 + x_3 \end{pmatrix} \qquad a \mapsto x = (x_{\mu}) \in R_4$$

$$a' = g^{*} a g \qquad g \mapsto A_g : R_4 \to R_4.$$

$\det a = x_0^2 - x_i^2$ es invariante. A_g conserva lo mismo. $\det A_g = 1$.

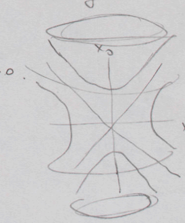
A_g deja invariante la parte superior del cono:

$$x_0^2 - x_i^2 = 0, \quad x_0 > 0. \qquad (\text{transf. propias de Lorentz}).$$

Existe una correspondencia entre los elementos g de $SL(2,C)$ y las transf. propias de Lorentz A_g tal que a cada g corresponde una A_g y a cada A_g corresponden $\pm g$. Al producto de g's corresponde el producto de A_g.

$SL(2,C)$ como grupo de movimientos del espacio de Lobachevski

Si se consideran el conjunto de matrices a, las transf. de Lorentz inducen movimientos en las siguientes superficies:



a) el manto superior (o inferior) del hiperboloide $x_0^2 - x_1^2 > 0$.

b) del hiperboloide: $x_0^2 - x_1^2 < 0$.

c) del manto superior (o inferior) del cono: $x_0^2 - x_i^2 = 0$.

$\therefore$ $SL(2,C)$ es localmente isomorfo al grupo de movimientos del espacio de Lobachevski.

2 Representaciones del grupo de Lorentz en los espacios de funciones homogéneas de dos variables complejas.

Sea G un grupo topológico y E un espacio vectorial topológico. Se dice que se tiene una representación de G en E si a cada $g \in G$ le corresponde un operador lineal continuo $T(g)$ en E tal que:

$$T(g_1 g_2) = T(g_1)\, T(g_2).$$

Si E es de dim finita, se dice que la representación es finita.

Si en E está definido un producto escalar (ξ, η), la representación $T(g)$ en E es unitaria si

$$(T(g)\xi, T(g)\eta) = (\xi, \eta) \quad \text{para toda } g \text{ y todo par } \xi, \eta$$

Un ejemplo de representación finita de $SL(2, C)$: Consideremos los polinomios homogeneos de grado $n_1 - 1$ de dos variables complejas z_1, z_2:

$$P(z_1, z_2) = a_0 z_1^{n_1-1} + a_1 z_1^{n_1-2} z_2 + \dots + a_{n-1} z_2^{n_1-1}$$

Forman un espacio vectorial de dimensión n_1. Asociemos la transformación $T(g)$ (matriz $n_1 \times n_1$)

$$T(g) P(z_1, z_2) = P(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2).$$

Los espacios D_χ. Están formados por funciones homogeneas $f(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ que designaremos por $f(z_1, z_2)$. Las funciones de una variable compleja $\varphi(z, \bar{z})$ serán designadas como $\varphi(z)$.

$f(z_1, z_2)$ es homogenea de grado λ, μ (complejos cuya diferencia es entera) si para todo a complejo $a \neq 0$ se tiene:

$$f(a z_1, a z_2) = a^{\lambda} \bar{a}^{\mu} f(z_1, z_2)$$

Sean n_1, n_2 un par de complejos cuya diferencia es entera. Designemos los por

$$\chi = (n_1, n_2).$$

El espacio D_χ está formado por las funciones $f(z_1, z_2)$ tales que:

1) son homogeneas de grado $n_1 - 1, n_2 - 1$
2) son infinitamente diferenciables respecto a z_1 y z_2, a excepción del punto $(0, 0)$.

Para introducir una topología diremos que la sucesión $\{f_m(z_1, z_2)\}$ converge a 0 si para todo compacto que no contenga el $(0,0)$ las funciones convergen uniformemente a 0, así como todas sus derivadas. D_χ es completo respecto a esta topología.

Realizaciones de D_χ. Consideremos la recta $z_2 = 1$ en C^2. Esta corta cada recta que pasa por el origen (a excepción de $z_2 = 0$) en un punto. Resulta que cada $f(z_1, z_2) \in D_\chi$ está unívocamente definida por sus valores en $z_2 = 1$. Por lo tanto le hacemos corresponder la función

$$\varphi(z) = f(z, 1).$$

Esto permite expresar f como:

$$f(z_1, z_2) = z_2^{n_1-1} \bar{z}_2^{n_2-1} \varphi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

Las funciones φ constituyen un espacio que también será llamado D_χ. De la relación anterior:

$$f(1, z) = z^{n_1-1} \bar{z}^{n_2-1} \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$$

y:

$$\hat{\varphi}(z) = z^{n_1-1} \bar{z}^{n_2-1} \varphi\left(-\frac{1}{z}\right)$$

son indefinidamente diferenciables respecto a z y $\bar{z}$. $\hat{\varphi}$ es la inversa de φ.

Recíprocamente, si φ y su inversa $\hat{\varphi}$ son indefinidamente diferenciables,

$$f(z_1, z_2) = z_2^{n_1-1} \bar{z}_2^{n_2-1} \varphi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

pertenece a D_χ. Para $|z| \to \infty$

$$\varphi(z) \sim f(1, 0) z^{n_1-1} \bar{z}^{n_2-1}$$

Representaciones de $SL(2, C)$ en el espacio D_χ.

Cada matriz g define en el plano (z_1, z_2) una transf. lineal

$$(z_1', z_2') = (\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2)$$

a la que corresponde una transf. lineal en el espacio de funciones. Entonces definimos:

$$T_\chi(g) f(z_1, z_2) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2)$$

Se puede mostrar que:

$$T_\chi(g_1, g_2) = T_\chi(g_1) T_\chi(g_2)$$

Así, a cada par de números complejos $\chi = (n_1, n_2)$ cuya diferencia es entera, se le asocia una representación $T_\chi(g)$ de $SL(2, C)$. χ es el peso de la representación.

Se puede probar que:

$$T_\chi(g) f(z_1, z_2) = (\beta z_1 + \delta z_2)^{n_1-1} \overline{(\beta z_1 + \delta z_2)}^{n_2-n_1} \varphi\left(\frac{\alpha z_1 + \gamma z_2}{\beta z_1 + \delta z_2}\right)$$

y

$$T_\chi(g) \varphi(z) = (\beta z + \delta)^{n_1-1} \overline{(\beta z + \delta)}^{n_2-1} \varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right)$$

Representaciones duales.

Sea D'_χ el espacio dual de D_χ (funcionales lineales del espacio D_χ). Se tiene la forma bilineal:

(F, φ) con $F \in D'_\chi$ y $\varphi \in D_\chi$

Se define el operador de la representación dual mediante

$$(\tilde{T}_\chi(g) F, \varphi) = (F, T_\chi(g^{-1}) \varphi)$$

Se tiene:

$$\tilde{T}_\chi(g_1, g_2) = \tilde{T}_\chi(g_1) \tilde{T}_\chi(g_2)$$

y

$$(\tilde{T}_\chi(g) F, T_\chi(g) \varphi) = (F, \varphi)$$

o sea: la forma bilineal es invariante respecto a los operadores de la representación

Definición simple: una representación es irreducible si no existen en E subespacios invariantes cerrados. Otra: $T(g)$ es irreducible en E si todo subespacio propio, invariante de $E \oplus E$ está formado por puntos $(c_1\xi, c_2\xi)$ donde $\xi \in E$ y c_1, c_2 son números fijos.

Consideremos las representaciones $T_1(g)$ y $T_2(g)$ del grupo G operando en los espacios E_1 y E_2. Sea $B(\varphi,\psi)$ una forma bilineal continua. Esta es invariante respecto a E_1 y E_2 si para todo $g \in G$:

$$B(T_1(g)\varphi, T_2(g)\psi) = B(\varphi,\psi)$$

Busquemos la forma invariante respecto a T_{χ_1} y T_{χ_2}. Existe sólo si:

1) $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$ $\quad (n_1, n_2 = 0, 1, \dots)$. Entonces:

$$B(\varphi,\psi) = \frac{i}{2}\int \varphi^{(n_1,n_2)}(z)\psi(z)\,dz\,d\bar{z} \qquad \text{con: } \varphi^{(n_1,n_2)} \equiv \frac{\partial^{n_1+n_2}\varphi(z)}{\partial z^{n_1}\partial z^{n_2}}$$

2) $m_1 = -n_1$, $m_2 = -n_2$ y

$$B(\varphi,\psi) = \frac{i}{2}\int \varphi(z)\psi(z)\,dz\,d\bar{z}$$

3) $m_1 = n_1$, $m_2 = -n_2$ $\quad (n_1 = 0, 1, \dots)$ y:

$$B(\varphi,\psi) = \frac{i}{2}\int \varphi^{(n_1,0)}(z)\psi(z)\,dz\,d\bar{z}$$

4) $m_1 = -n_1$, $m_2 = n_2$ $\quad (n_2 = 0, 1, \dots)$ y

$$B(\varphi,\psi) = \frac{i}{2}\int \psi^{(0,n_2)}(z)\psi(z)\,dz\,d\bar{z}.$$

Para probarlas hay que considerar que a cada matriz

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

corresponde una homografía (transf. lineal) $w = \dfrac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}$ del plano complejo.
A la multiplicación de matrices corresponde la composición de transformaciones y las matrices

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ corresponden a la transf. idéntica,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_0 & 0 \end{pmatrix}$ a la traslación $z \to z + z_0$.

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ a la semejanza $z \to \alpha^2 z$ y

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a la inversión $z \to -\dfrac{1}{z}$

Toda transf. w es una composición de las tres últimas.

Corolario: Como para todo par de complejos $\chi = (n_1, n_2)$ las representaciones T_χ y $T_{-\chi}$ con $-\chi = (-n_1, -n_2)$ generan una forma bilineal invariante y no degenerada, la representación dual $\tilde{T}_\chi(g)$ es una prolongación de $T_{-\chi}(g)$

4. Representaciones unitarias de SL(2,C)

Un producto escalar invariante es una forma hermitiana positiva definida (φ,ψ) en el espacio D_χ, tal que:

$$(\varphi,\psi) = (T_\chi(g)\varphi, T_\chi(g)\psi)$$

para todas las funciones $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ del espacio D_χ y toda $g \in SL(2,C)$.

Las formas hermitianas invariantes existen en D_χ, $\chi = (n_1, n_2)$ si y sólo si $n_1 = -\bar{n}_2$ o $n_1 = \bar{n}_2$, ~~En el primer caso~~ se habla de la serie principal ~~y en el segundo de la complementaria~~. En el primer caso y la forma hermitiana invariante es:

$$(\varphi,\psi) = \frac{i}{2}\int \varphi(z)\bar{\psi}(z)\,dz\,d\bar{z} \qquad \text{Nótese: } \chi = \left(\frac{n+i\rho}{2}, \frac{-n+i\rho}{2}\right)$$ con n entero y ρ un real arbitrario.

En el segundo, $n_1 = \bar{n}_2$, $n_1 = n_2 = \rho$ (ρ real ya que $n_1 - n_2$ es entero) y

$$(\varphi,\psi) = c\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int |z_1 - z_2|^{-2\rho-2}\varphi(z_1)\bar{\psi}(z_2)\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2$$

si $\cancel{\rho \neq 0, 1, \dots \text{ y}}$ $\rho \neq 0$ y $-1 < \rho < 1$. Se habla de la serie complementaria.

$$\cancel{(\varphi,\psi) = c\frac{i}{2}\int \varphi^{(q,q)}(z)\bar{\psi}(z)\,dz\,d\bar{z}}$$

No se considerará el caso $\chi = (\rho,\rho)$ con $|\rho| \geq 1$, $\rho \neq \pm 1, \pm 2, \dots$

Consideremos el caso singular $\chi = (n_1, n_2)$ con $n_1 = n_2 = q$ un entero. Se puede probar que en este caso:

$$(\varphi,\psi) = (-)^q \frac{i}{2}\int \varphi^{(q,q)}(z)\bar{\psi}(z)\,dz\,d\bar{z}$$

Esta es degenerada: se anula para toda función $\psi(z)$ del espacio D_χ y para todo polinomio de la forma:

$$\varphi(z) = \sum_{i,j=0}^{q-1} a_{ij} z^i \bar{z}^j$$

Estos polinomios forman en D_χ un subespacio invariante E_χ de dimensión finita. Por consiguiente (φ,ψ) con $n_1 = n_2 = 1, 2, \dots$ puede considerarse como una forma hermitiana invariante en el espacio D_χ/E_χ. Ahí es no degenerada y positiva definida.

Representaciones unitarias de SL(2,C) por operadores en un espacio de Hilbert. Si existe una forma hermitiana invariante positiva en el espacio D_χ, se puede introducir la norma:

$$\|\varphi\|^2 = (\varphi,\varphi)$$

Así, a cada representación $T_\chi(g)$ que admite una forma hermitiana definida positiva corresponde una representación del grupo por operadores unitarios en un espacio de Hilbert. Esta correspondencia transforma representaciones equivalentes en equivalentes y no equivalentes en no equivalentes. (Dos representaciones unitarias $T_1(g)$ y $T_2(g)$ de un grupo G en los espacios de Hilbert H_1 y H_2 son equivalentes si existe una aplicación isométrica $A: H_1 \to H_2$ tal que $AT_1(g) = T_2(g)A$)

Las representaciones antes mencionadas son especialmente irreducibles, esto es, no hay en el espacio de Hilbert subespacios cerrados no triviales invariantes respecto a la representación T_χ

ANALISIS HARMÓNICO SOBRE SL(2,C)

1. Funciones sobre G.

La norma $|g|$ de la matriz $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ es:

$$|g|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 ;$$

satisface.
$$|g_1 + g_2| \leq |g_1| + |g_2|$$
$$|g_1 g_2| \leq |g_1| \cdot |g_2|$$
$$|ag| = |a| \cdot |g| \quad \text{con } a \text{ arbitrario.}$$

Sea $f: G \to C$

$f(g)$ es de soporte compacto si existe $A > 0$ tal que $f(g) = 0$ para $|g| > A$.

$f(g)$ es continua si

$$\lim_{n\to\infty} f(g_n) = f(g) \quad \text{cuando} \quad \lim_{n\to\infty} |g_n - g| = 0$$

El conjunto de funciones continuas de soporte compacto definidas sobre G constituye un espacio vectorial C. Se puede introducir en él, de manera natural, una topología como sigue: la sucesión $\{f_n(g)\}$ de funciones continuas de soporte compacto converge a cero si:

1 – Existe A tal que todas las $f_n(g) = 0$ para $|g| > A$.

2 – En el dominio $|g| \leq A$, la sucesión $\{f_n(g)\}$ converge uniformemente a cero.

$f(g)$ es rápidamente decreciente si

$$\lim_{|g|\to 0} |g|^n f(g) = 0 \quad \text{para toda } n.$$

esto es,
$$|f(g)| < C|g|^{-n} \quad \text{para toda } n.$$

El conjunto de funciones continuas rápidamente decrecientes constituye también un espacio vectorial. La topología está dada con la ayuda de la sucesión de normas:

$$\|f\|_n = \sup_g |g|^n |f(g)|$$

Integración invariante en G. El elemento de volumen debe ser invariante respecto a translaciones derechas e izquierdas, esto es:

$$dg = d(g_0 g) = d(g g_0).$$

Con esto la integral (si existe) tiene la propiedad:

$$\int f(g)\,dg = \int f(g_0 g)\,dg = \int f(g g_0)\,dg$$

Se puede probar que el elemento de volumen es:

$$dg = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \frac{d\beta\, d\gamma\, d\delta\, d\bar\beta\, d\bar\gamma\, d\bar\delta}{|\delta|^2} = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \frac{d\alpha\, d\gamma\, d\delta\, d\bar\alpha\, d\bar\gamma\, d\bar\delta}{|\gamma|^2}$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^3 \frac{d\alpha\, d\beta\, d\delta\, d\bar\alpha\, d\bar\beta\, d\bar\delta}{|\beta|^2} = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\bar\alpha\, d\bar\beta\, d\bar\gamma}{|\alpha|^2}$$

Se puede probar también que

$$d(g^{-1}) = dg$$

La función $f(g)$ es sumable sobre G si

$$\int |f(g)|\, dg$$

es convergente. Se puede mostrar que si $f(x)$ es rápidamente decreciente, $f(x)$ es sumable.

Función diferenciable en G. Identifiquemos $g \in G$ con los puntos de la superficie $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ en el espacio complejo de cuatro dimensiones. En las vecindades de cada punto de esta superficie se puede seleccionar como coordenadas tres parámetros entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (Por ejemplo, si $\beta \neq 0$ en esa vecindad: γ es una función continua de α, β, δ y

$$dg = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \frac{d\alpha\, d\bar\alpha\, d\beta\, d\bar\beta\, d\delta\, d\bar\delta}{|\beta|^2} \quad)$$

Se dice que $f(g)$ es indefinidamente diferenciable en la vecindad de g_0 si, como función de tres coordenadas en la vecindad de g_0, posee derivadas de todos los órdenes en esa vecindad. Se puede probar que esta definición no depende del sistema de coordenadas.

2. La transformación de Fourier sobre G.

Como la exponencial $e^{i\lambda x}$ tiene la propiedad:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2)$$

los análogos de ella en G deben ser soluciones de la ecuación funcional:

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$$

Cada solución de esta ecuación es una representación de G y las más simples son los operadores $T_\chi(g)$, $\chi = (u_1, u_2)$ definidos en el espacio D_χ por la fórmula:

$$T_\chi(g)\varphi(z) = (\beta z + \delta)^{u_1 - 1} \overline{(\beta z + \delta)}^{u_2 - 1} \varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right)$$

(Las únicas funciones escalares que satisfacen la ec. funcional anterior son $f(g) \equiv 1$).
(χ juega el papel de $i\lambda$ de la exponencial).

La transformada de Fourier de $f(g)$ definida sobre G es la función (con valores en un espacio de operadores) definida por:

$$F(\chi) = \int f(g) T_\chi(g)\, dg.$$

Así, para cada χ para la cual $F(\chi)$ está definida, esta es un operador en D_χ de acuerdo con:

$$F(\chi)\varphi(z) = \int f(g) T_\chi(g) \varphi(z)\, dg$$

Dominio de definición de $F(\chi)$. Si $f(g)$ es una función continua rapidamente decreciente, la integral:

$$F(\chi) = \int f(g) T_\chi(g)\, dg$$

converge para todo $\chi = (u_1, u_2)$, esto es, para todo $\varphi \in D_\chi$, la integral $\int f T_\chi \varphi\, dg$ es convergente y $F\varphi \in D_\chi$. Por tanto $F(\chi)$ es continuo respecto a la topología de D_χ.

Si $f(g)$ es sumable sobre G, $F(\chi)$ está definida en la banda: $-2 \leq \mathrm{Re}(u_1 + u_2) \leq 2$. Se puede mostrar también que en este caso D_χ puede ser encajado como un subespacio denso en un espacio de Banach L_χ de tal manera que los operadores $T_\chi(g)$ son isometrías en ese espacio. La integral

$$F(\chi) = \int f(g) T_\chi(g)\, dg$$

es convergente en la norma de L_χ para toda función sumable $f(g)$.
(La norma es $\|\varphi\|_p$ donde

$$p = \frac{4}{2 - \mathrm{Re}(u_1 + u_2)};$$

entonces:

$$\|\varphi\|_p = \left[\frac{i}{2} \int |\varphi(z)|^p\, dz\, d\bar z\right]^{1/p} \qquad \text{con} \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

3. Propiedades de la Transformación de Fourier en G.

Si $F(\chi)$ es la transformada de Fourier de $f(g)$, las transformadas de la función $f(g g_0)$ y $f(g_0^{-1} g)$ son: $F(\chi) T_\chi^{-1}(g_0)$ y $T_\chi(g_0) F(\chi)$

La transf. de F. de la convolución

$$f_1 * f_2(g) = \int f_1(g_1) f_2(g_1^{-1} g)\, dg_1$$

de las funciones continuas rapidamente decrecientes f_1, f_2 es:

$$F_1(\chi) F_2(\chi) = \int f_1 * f_2(g) T_\chi(g)\, dg$$

Si $F(\chi)$ es la Transf. de F. de $f(g)$, la Transf. de F de $f(g^{-1})$ es la función $F'(-\chi)$ donde $F'(\chi)$ es el operador transpuesto de $F(\chi)$.

Si $F(\chi)$ es la Transf de F de $f(g)$, la transf de F de $\overline{f(g)}$ es la función $\bar F(\bar\chi)$ definida por

$$\bar F(\bar\chi)\varphi(z) = \overline{F(\bar\chi)\varphi(z)} \qquad (\bar\chi = (\bar u_2, \bar u_1))$$

Combinando los resultados anteriores se tiene: Si $F(\chi)$ es la Transf. de F de $f(g)$, la transf. de F de $f^*(g)$ es $F^*(\chi^*)$ donde: $F^* = \bar{F}'$, $\chi^* = (-\bar{n}_2, -\bar{n}_1)$.

Se puede mostrar que la transf. de F de toda función continua rápidamente decreciente se puede escribir, para todo χ, como un operador integral:

$$F(\chi)\,\varphi(z) = \frac{i}{2}\int K(z, z'; \chi)\,\varphi(z')\,dz'\,d\bar{z}'$$

con K función continua de z y z', donde:

$$K(z_1, z_2; \chi) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int f(\lambda^{-1} + \beta z_2, \beta, \lambda - \beta z_1)\,\lambda^{n_1 - 1}\,\bar{\lambda}^{n_2 - 1}\,d\lambda\,d\bar{\lambda}\,d\beta\,d\bar{\beta}$$

Este núcleo puede calcularse en dos etapas: construyendo $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ a partir de la función $f(g) = f(\alpha, \beta, \delta)$ mediante:

$$\varphi(z_1, z_2; \lambda) = \frac{i}{2}\int f(\lambda^{-1} + \beta z_2, \beta, \lambda - \beta z_1)\,d\beta\,d\bar{\beta}$$

y luego:

$$K(z_1, z_2; \chi) = \frac{i}{2}\int \varphi(z_1, z_2; \lambda)\,\lambda^{n_1 - 1}\,\bar{\lambda}^{n_2 - 1}\,d\lambda\,d\bar{\lambda}$$

Para la interpretación geométrica de φ y las propiedades de K ver. T.V p. 243.

La fórmula de inversión: Sea $F(\chi)$ la T. de F. de la función $f(g) \equiv f(\alpha, \beta, \delta)$ definida sobre G, indefinidamente diferenciable y de soporte compacto, y $F(\chi)$ está definida sobre el "eje real", esto es, en los puntos $\chi = (n_1, n_2)$ que corresponden a representaciones unitarias de la serie principal. Esto es:

$$n_1 = \frac{n + i\rho}{2}, \quad n_2 = \frac{-n + i\rho}{2}$$ con n entero y ρ un real.

La fórmula de inversión es:

$$f(g) = -\frac{1}{8\pi^4}\int_{X_0} \mathrm{Tr}\left(F(\chi)\,T_\chi^{-1}(g)\right) c(\chi)\,d\chi$$

con $c(\chi) = n_1 n_2$ y X_0 el "eje real" (la integral respecto a χ significa integración respecto a ρ y suma sobre n).

La fórmula de Plancherel:

$$\int |f(g)|^2\,dg = -\frac{1}{8\pi^4}\int_{X_0} c(\chi)\,\mathrm{Tr}\left[F(\chi)\,F^*(\chi)\right] d\chi$$

$$= -\frac{1}{8\pi^4}\int_{X_0}\int |K(z_1, z_2; \chi)|^2\,c(\chi)\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2\,d\chi$$

4. Relación entre el desarrollo en integrales de Fourier y la descomposición en representaciones irreducibles.

La representación regular (regular a la derecha) de un grupo localmente compacto G se construye en el espacio de Hilbert H de funciones $f(g)$ definidas sobre el grupo para las cuales

$$\|f\|^2 = \int |f(g)|^2\,dg$$

es convergente (dg es la medida invariante sobre G)

Hagamos corresponder a cada $g_0 \in G$ el operador $R(g_0)$ de translación a la derecha en H:

$$R(g_0)\,f(g) = f(g g_0)$$

Es evidente que

$$R(g_1 g_2) = R(g_1)\,R(g_2)$$

esto es, R es una representación de G (es la regular!) Es unitaria ya que dg es invariante frente a translaciones $g \to g g_0$

Definamos la descomposición de la representación unitaria $T(g)$ de G en una suma directa continua. Supongamos que $T(g)$ está dada en un espacio nuclear Φ; ésta es unitaria respecto al producto escalar (φ, ψ) en Φ. Completando Φ respecto al producto escalar se obtiene un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ y la representación $T(g)$ se prolonga en una unitaria en $\mathfrak{H}$. Supongamos que éste se descompone en una suma directa continua:

$$\mathfrak{H} = \int_X \oplus H(x)\,d\mu$$

respecto a una cierta medida μ. Se puede mostrar que: Para cada $x \in X$ existe un operador nuclear $P(x)$ que proyecta Φ en $H(x)$ tal que para $\varphi \in \Phi$, las funciones $\varphi(x)$ y $P(x)\varphi$ difieren sólo en un conjunto de medida nula.

Supongamos que existen representaciones unitarias $T_x(g)$ de G en los espacios $H(x)$, tales que para todo $\varphi \in \Phi$:

$$T_x(g)\,P(x)\,\varphi = P(x)\,T(g)\,\varphi$$

Diremos entonces que $T(g)$ es la suma directa continua de las representaciones $T_x(g)$ y escribimos:

$$T(g) = \int_X \oplus T_x(g)\,d\mu.$$

Las $T_x(g)$ se llaman las componentes de $T(g)$ en los espacios $H(x)$. Nos interesa que todas las T_x sean irreducibles.

En el caso que nos ocupa, el desarrollo de las funciones $f(g)$ en integrales de Fourier conduce a la representación regular

$$R(g_0)\,f(g) = f(g g_0)$$

de ese grupo.

Sea Σ el conjunto de pares $x=(z_1,\chi)$ donde $\chi=\left(\frac{n+i\rho}{2}, \frac{-n+i\rho}{2}\right)$. Hagamos corresponder a cada $x\in\Sigma$ el espacio de Hilbert $H_{z_1,\chi}$ de funciones $\varphi(z)$ tales que:

$$\|\varphi\|^2_{z_1,\chi} = \frac{i}{2}\int |\varphi(z)|^2 dz\, d\bar{z} < \infty$$

Es evidente que cada núcleo $K(z_1,z;\chi)$ puede considerarse como una función vectorial definida en Σ con valores en $H_{z_1,\chi}$. De la fórmula de Plancherel:

$$\int |f(g)|^2 dg = \int \|K(z_1,z;\chi)\|^2_{z_1,\chi}\, d\mu.$$

lo que muestra que la aplicación $f(g)\to K(z_1,z_2;\chi)$ es una descomposición del espacio H de funciones $f(g)$ en una suma directa continua de espacios $H_{z_1,\chi}$ respecto a la medida μ.

$$H = \int_{\Sigma} \oplus H_{z_1,\chi}\, d\mu.$$

El núcleo $K(z_1,z;\chi)$ como función de z se transforma, cuando $f(g)\to f(gg_0)$, siguiendo la representación $T_{-\chi}(g_0)$ de la serie principal. Resumiendo: El desarrollo de funciones sobre G en integrales de Fourier, define una descomposición de la representación regular $R(g)$ de G en una suma directa continua de representaciones irreducibles de la serie principal. A cada χ corresponde una serie de componentes (dependientes de z_1) en las cuales se induce la representación $T_{-\chi}(g)$.

5. Operadores diferenciales sobre G

El espacio tangente de G.

Pasemos "curvas" en G:

$$h(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

por el punto $e=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. t es un parámetro complejo igual a cero en e por lo que:

$a(0)=d(0)=1$, $b(0)=c(0)=0$. Supondremos que a,b,c,d son analíticas en t para $|t|$ pequeño.

El vector tangente a la curva $h(t)$ en $e=h(0)$ es:

$$h=h'(0) = \begin{pmatrix} a'(0) & b'(0) \\ c'(0) & d'(0) \end{pmatrix}$$

La colección de vectores tangentes en e a todas las curvas que pasan por ese punto es un espacio vectorial complejo, que llamamos el espacio tangente de G en e y que denotamos Λ (es de dimensión 6). Está formado por las matrices de traza igual a cero, ya que:

$$\det h(t) = a(t)d(t) - b(t)c(t) = 1.$$

Derivando y haciendo $t=0$. $\quad a'(0)+d'(0)=0$.

Se puede mostrar que a cada matriz h del espacio tangente corresponde un subgrupo uniparamétrico $h(t)$ de G, unívocamente determinado, del cual h es tangente. (Un grupo uniparamétrico es una curva $h(t)$ tal que:

$$h(t_1+t_2) = h(t_1)h(t_2) \text{ para todo complejo } t_1 \text{ y } t_2).$$

Los operadores de Lie.

Hagamos corresponder a cada matriz $h\in\Lambda$ los operadores diferenciales lineales A_h y $\bar{A}_h$. Se definen como:

$$A_h f(g) = \frac{\partial}{\partial t} f[h(t)g]\Big|_{t=0} \qquad \bar{A}_h f(g) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} f[h(t)g]\Big|_{t=0}.$$

Se puede probar que no dependen de la elección de la curva y se llaman los operadores de derivación a la izquierda según la dirección h o bien operadores izquierdos de Lie.

Estos satisfacen:

$$A_{\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2} = \lambda_1 A_{h_1} + \lambda_2 A_{h_2}, \qquad \bar{A}_{\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2} = \bar{\lambda}_1 \bar{A}_{h_1} + \bar{\lambda}_2 \bar{A}_{h_2}$$

esto es, forman espacios vectoriales complejos.

Introduciendo la base:

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad a_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que son las tangentes a las curvas:

$$a_0(t) = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \qquad a_+(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

Los operadores de Lie correspondientes son: A_0, A_+, A_- y $\bar{A}_0, \bar{A}_+, \bar{A}_-$

Se pueden introducir los operadores derechos de Lie como:

$$B_h f(g) = \frac{\partial}{\partial t} f[gh(t)]\Big|_{t=0}, \qquad \bar{B}_h f(g) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} f[gh(t)]\Big|_{t=0}.$$

sobre la curva $h(t)$ tal que $h(0)=e$ y $h'(0)=h$. Estos forman un espacio vectorial de dimensión 3 cada uno y se pueden introducir bases como las anteriores para obtener los operadores B_0, B_+, B_- y $\bar{B}_0, \bar{B}_+, \bar{B}_-$.

En términos de los elementos independientes α,β,δ de la matriz $g=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ellos son

$$A_0 = \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial}{\partial\beta} - \delta\frac{\partial}{\partial\delta}\right) \qquad B_0 = \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \beta\frac{\partial}{\partial\beta} - \delta\frac{\partial}{\partial\delta}\right)$$

$$A_+ = \gamma\frac{\partial}{\partial\alpha} + \delta\frac{\partial}{\partial\beta} \qquad B_+ = \alpha\frac{\partial}{\partial\beta} + \gamma\frac{\partial}{\partial\delta}$$

$$A_- = \beta\frac{\partial}{\partial\delta} \qquad B_- = \beta\frac{\partial}{\partial\alpha}$$

Las expresiones correspondientes a $\bar{A}_0, \bar{A}_+, \bar{A}_-$ y $\bar{B}_0, \bar{B}_+, \bar{B}_-$ se obtienen reemplazando $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ por sus conjugados y $\frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\partial}{\partial\beta}, \frac{\partial}{\partial\delta}$ por $\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial\bar{\beta}}, \frac{\partial}{\partial\bar{\delta}}$

G debe tener 6 operadores diferenciales de 1er orden linealmente independientes. Sus relaciones se encuentran fácilmente de los operadores:

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & A_+ \\ A_- & -A_0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_0 & B_+ \\ B_- & -B_0 \end{pmatrix}$$

que satisfacen:

$$g^T A = B g^T$$

donde g^T es la matriz transpuesta de g. (Se puede probar directamente).

Como las traslaciones a la derecha conmutan con las izquierdas, los operadores derechos de Lie conmutan con los izquierdos, esto es:

$[A_{h_1}, B_{h_2}] = [\bar{A}_{h_1}, \bar{B}_{h_2}] = [A_{h_1}, \bar{B}_{h_2}] = [\bar{A}_{h_1}, B_{h_2}] = 0$.

Como $\partial/\partial t$ y $\partial/\partial \bar{t}$ conmutan: $[A_{h_1}, \bar{A}_{h_2}] = [B_{h_1}, \bar{B}_{h_2}] = 0$.

Además:

$$[A_+, A_0] = A_+ \qquad [B_+, B_0] = -B_+$$
$$[A_-, A_0] = -A_- \qquad [B_-, B_0] = B_+$$
$$[A_+, A_-] = -2A_0 \qquad [B_+, B_-] = 2B_0.$$

que se pueden probar directamente o bien observando que:

$\mathrm{Tr}\,[h_1, h_2] = 0$ y:

$$[A_{h_1}, A_{h_2}] = -A_{[h_1, h_2]} \qquad [B_{h_1}, B_{h_2}] = B_{[h_1, h_2]}$$

y $[a_+, a_0] = -a_+ \qquad [a_-, a_0] = a_- \qquad [a_+, a_-] = -2a_0$.

Un operador importante es el de Laplace que se define como:

$$\Delta = 2A_0^2 + A_+A_- + A_-A_+$$

que conmuta con todos los operadores de Lie. y se puede escribir como.

$$\Delta = \mathrm{Tr}\,A^2 = \mathrm{Tr}\,B^2$$

Se puede mostrar que todo operador diferencial que conmuta con todos los operadores de Lie es un polinomio de Δ y $\bar{\Delta}$

UN ESQUEMA DEL ANÁLISIS HARMÓNICO

Sea S un conjunto (espacio) y G un grupo de transformaciones de S. Llamemos $[s]x$ al transformado de $s \in S$ por $x \in G$. Si S tiene alguna estructura que sea preservada por el grupo G, las transf. $s \to [s]x$ son simetrías de S. Conviene que G tenga elementos distintos de e que definan el mapeo idéntico con lo cual habrá un grupo cociente G/N que sea el grupo efectivo de transformaciones.

Sea $\mathcal{F}$ un espacio vectorial de funciones complejas definidas en S que sean invariantes frente a G, esto es, que $f(s) \to f([s]x)$, el trasladado de f por x, esté en $\mathcal{F}$ si $f \in \mathcal{F}$. Entonces, para cada $x \in G$, el mapeo $f \to g$ donde $g(s) = f([s]x)$ es una transf. lineal V_x de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}$ y $V_{xy} = V_x V_y$ para toda $x, y \in G$. El mapeo $x \to V_x$ es una representación lineal de G.

El método del análisis armónico consiste en encontrar subespacios M_λ de $\mathcal{F}$ tales que:

1.- $V_x(M_\lambda) = M_\lambda$ para toda x y λ.

2.- Todo $f \in \mathcal{F}$ puede representarse de manera única como $f = \sum_\lambda f_\lambda$ donde $f_\lambda \in M_\lambda$

3 - Los subespacios M_λ no pueden descomponerse más (son más simples que $\mathcal{F}$)

Ejemplos:

1- $S = R$ (la recta real) $\quad G = T$ (grupo de traslaciones)

$[s]x$ definido como: $t \to t + t_0$

Sea $\mathcal{F} = L^2$ esto es: f tales que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$

Transf. de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \qquad \lambda \in R.$$

1.

2.

2. $S = S^2$ (esfera de dim 2) $G = O^+(3)$ (Grupo de rotación)

$[S]x$ definido como $s \in S^2 \longrightarrow s' = Rs$

Sea $\mathcal{F} = \{ f(\theta, \varphi) \}$ f son cuadráticamente integrables.

1 – $M_{2\ell+1} = \{ Y_{\ell,m} \}$ $\ell = 0, 1, 2 \ldots$

2 – $f = \sum_{l,m} C_{\ell m} Y_{\ell m}$ $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm \ell$ $\ell = 0, 1, 2,$

3: $S = C^2$ (esp. complejo de dim 2) $G = SL(2, C)$

Sea $\mathcal{F} = D\chi$. funciones homógeneas de grado $n_1 - 1$, $n_2 - 1$, infinitamente diferenciables.

$$f(g) = -\frac{1}{8\pi 4} \int_{\Sigma_0} n_1 n_2 \, \mathrm{Tr} \left[F(\chi) T_\chi^{-1}(g) \right] d\chi$$

Σ_0 es el "eje real" esto es el conjunto de puntos: $\chi = \left(\frac{n + i\rho}{2}, \frac{-n + i\rho}{2} \right)$