Archivo
Luis Estrada

LA MECANICA HAMILTONIANA

1. Las ecuaciones de Hamilton.

En la mecánica lagrangiana: (sistemas conservativos de n grados de libertad)

$$L = L(q_i, \dot{q}_i) = T - V$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

El impulso conjugado a la coordenada q_i es:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Calculemos:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j =$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) = \frac{d}{dt}\sum_j p_j \dot{q}_j$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left[\sum_j p_j \dot{q}_j - L\right] = 0$$

o sea:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L = cte \qquad \text{(A)}$$

$\therefore$ H, la hamiltoniana, es una constante de movimiento.

H es independiente de $\dot{q}_j$ ya que:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_j} = p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

(A) es una transf. de Legendre

$$H = H(q_i, p_i)$$

De (A) y las ecs. de Lagrange:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}p_j$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j$$

$\therefore$ las ecs. de Hamilton son:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j \qquad j = 1, \dots, n.$$

$$df = \frac{df}{dx}dx$$

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \langle \text{grad} f, dr \rangle$$

$$\text{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_i} \\ \frac{\partial f}{\partial q_i} \end{pmatrix}$$

Relación entre p y $\dot{q}$:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{ij} a_{ij}(q)\,\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q)$$

$$\therefore \quad p_i = \sum_j a_{ij}\dot{q}_j$$

De esta relación puede obtenerse: $\dot{q}_i = \sum_j b_{ij}\, p_j$

$$\therefore \quad T = \frac{1}{2}\sum_{ij} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \rightarrow T = \frac{1}{2}\sum_{ij} c_{ij}\, p_i p_j$$

¡forma cuadrática en p!

De (A):

$$H = \sum_{ij} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - L = 2T - L = T + V$$

$$\therefore \quad H = T + V$$

Los valores de H son la energía:

Caso de una partícula en $\mathbb{R}^3$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \qquad V = V(x,y,z)$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \therefore \quad \dot{x} = \frac{1}{m}p_x \quad \dot{y} = \frac{1}{m}p_y \; \cdots$$

$$\therefore \quad H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x,y,z)$$

Las ecs. de movimiento son:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = -\dot{p}_x \qquad \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m}p_x = \dot{x} \qquad \text{etc.}$$

Las ecs. de Hamilton son 6 ecs de primer grado.

Escribiéndolas como:

$$x = \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix}$$ se tiene:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{p}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{pmatrix} = J \cdot \text{grad}\, H.$$

con $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $(2n \times 2n)$ y las ecs de Hamilton son

$$\dot{x} = J \cdot \text{grad}\, H$$

¡sistema dinámico!

Se trata de un campo vectorial definido por $X = J \cdot \text{grad}\, H$

Si se introduce una "métrica simpléctica"

$$\langle x_1, x_2 \rangle = x_1 \cdot J \cdot x_2 = \sum_i (q_{1i}p_{2i} - q_{2i}p_{1i})$$

con lo que se puede escribir, naturalmente:

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial f}{\partial q_i} \end{pmatrix}$$

2. La geometría simpléctica

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Definamos en él un producto escalar $\langle x, y \rangle$ que

i) es antisimétrico, esto es, $\langle x,y\rangle = -\langle y,x\rangle$

ii) no es degenerado, esto es, si $\langle x,y\rangle = 0$ para toda y, entonces $x=0$.

Se dice que x es ortogonal a y si $\langle x,y\rangle=0$. Nótese que todo vector es ortogonal a sí mismo.

El complemento ortogonal de x (plano nulo o núcleo de x) es:

$$N(x) = \{y \mid \langle x,y\rangle = 0\}$$

Nótese que $N(x)$ contiene a x, es un subespacio vectorial, y su dimensión es $n-1$, ya que:

si ~~...~~ $x \neq 0$, existe z tal que $\langle x,z\rangle \neq 0$ ya que el producto escalar no es degenerado. Además, si $y \in N(x)$, ~~...~~ $z-y \notin N(x)$ de lo que concluimos que todo $z \in V$ puede escribirse como $z = f + y$ donde $f \notin N(x)$ y $y \in N(x)$.

Construyamos la base estandard de V

Seleccionemos $e_1 \in V$, $e_1 \neq 0$. Como el producto escalar no es degenerado, existe $f^1 \in V$ tal que $\langle e_1, f^1\rangle \neq 0$. Seleccionamos f^1 tal que $\langle e_1, f^1\rangle = 1$. Los vectores e_1 y f^1 subtienden un ~~espa~~ subespacio vectorial ~~definido por~~ tal que $\langle e_1,e_1\rangle = \langle f^1,f^1\rangle = 0$ $\langle e_1, f^1\rangle = 1$. Consideremos el complemento ortogonal D de este subespacio, esto es $D = \{g \mid \langle e_1, g\rangle = \langle f^1, g\rangle = 0\}$. Este es $D = N(e_1) \cap N(f^1)$ y como estos son independientes, éste es un subespacio de dimensión $n-2$. D es un esp. vecto simpléctico de dimensión $n-2$ y podemos repetir el proceso.

Se concluye que la dimensión de V es par y posee una base (estandard) $\{e_i, f^i\}$ $(i=1,\dots,\frac{n}{2})$ tal que:

$$\langle e_i, e_j\rangle = \langle f^i, f^j\rangle = 0 \qquad \langle e_i, f^j\rangle = \delta_i^j$$

En términos de esta base todo vector de V se puede escribir como:

$$x = \sum_{i=1}^{n/2} (q^i e_i + p_i f^i)$$

y el producto escalar de x_1 y x_2 es:

Base estandard: $\{\hat{q}_i, \hat{p}_i\}$ tal que:

$$\langle \hat{q}_i, \hat{q}_j\rangle = \langle \hat{p}_i, \hat{p}_j\rangle = 0 \quad , \quad \langle \hat{q}_i, \hat{p}_j\rangle = \delta_{ij}$$

Todo x puede escribirse como:

$$x = \sum_{i=1}^{n} (q_i \hat{q}_i + p_i \hat{p}_i)$$

Si se usan matrices:

$$x = \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix} \qquad \tilde{x} = (q_i, p_i) \qquad \text{y definiendo:} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; n \times n$$

el producto escalar $\langle x_1, x_2\rangle$ es:

$$\tilde{x}_1 J x_2 = (q_i^1, p_i^1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_i^2 \\ p_i^2 \end{pmatrix} = \sum_i (q_i^1 p_i^2 - q_i^2 p_i^1)$$

Transf. canónica:

$$\bar{x} = Sx \qquad \text{tales que} \qquad \langle \bar{x}, \bar{y}\rangle = \langle x, y\rangle$$

por lo que:

$$\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle = \langle Sx, Sy\rangle = \tilde{x}\tilde{S}JSy = \tilde{x}Jy$$

$$\therefore \quad \tilde{S}JS = J$$

$$\langle x_1, x_2\rangle = \sum_{i=1}^{n/2} (q^i_1 p_{2i} - q^i_2 p_{1i}) \qquad (B)$$

Si se definen las formas lineales q^i y p_i como

$$q^i(x) = q^i \qquad p_i(x) = p_i$$

se puede introducir el producto exterior $\sum_i q^i \wedge p_i$ definido como

$$\left(\sum_i q^i \wedge p_i\right)(x_1, x_2) = \sum_i \begin{vmatrix} q^i(x_1) & p_i(x_1) \\ q^i(x_2) & p_i(x_2) \end{vmatrix} = \sum_i (q^i_1 p_{2i} - q^i_2 p_{1i})$$

y caracterizar el espacio simpléctico mediante la forma bilineal

$$\omega^2 = \sum_i q^i \wedge p_i$$

Se puede probar que todos los espacios simplécticos de la misma dimensión (finita) son isomorfos.

Consideremos funciones definidas en V. Sea $f: V \to R$. Su diferencial es la función lineal $df: V \to R$ que aproxima a f en x_0 en el sentido que:

$$f(x_0+x) - f(x_0) = df + \varepsilon|x|$$

donde $\varepsilon \to 0$ si $|x| \to 0$.

Definimos el gradiente mediante la expresión:

$$df = \langle \text{grad } f, x\rangle$$

Klein.

De aquí que: $$\text{grad } f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} e_i \mp \frac{\partial f}{\partial q^i} f^i\right) = \sum_i (\partial^i f e_i - \partial_i f f^i) \qquad (C)$$

ya que, de la definición del producto escalar; ec. (B):

$$df = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} p_i + \frac{\partial f}{\partial q^i} q^i\right)$$

Al campo vectorial definido por la función f mediante su gradiente, se le denota:

$$\mathbb{X}_f = \text{grad } f$$

Mas precisamente, el campo vectorial es $\mathbb{X}_f(x)$.

Consideremos las funciones: $f, g: V \to R$ Construyamos los campos vectoriales $\mathbb{X}_f$ y $\mathbb{X}_g$ y definamos el paréntesis de Poisson como:

$$\{f, g\} = \langle \mathbb{X}_f, \mathbb{X}_g\rangle = \langle \text{grad } f, \text{grad } g\rangle$$

Derivada de Lie de f respecto al vector tangente $\mathbb{X}$ en x:

$$D_{\mathbb{X}} f = \mathbb{X}(x) f$$ (Derivada de Lie o operador de Liouville).

Consideremos el campo vectorial $\mathbb{X}$ en V. Para toda $f: V \to R$ definimos la derivada en la dirección de $\mathbb{X}$ como: (~~Derivada de~~ Lie

$$(L_{\mathbb{X}} f)(x) = \frac{d}{dt} f(g(x))\Big|_{t=0}$$

en donde g es el flujo: $g: M \to M$, Esto es:

$$\frac{d}{dt} g(x)\Big|_{t=0} = \mathbb{X}(x)$$

Si $\{x_i\}$ son coordenadas en V y $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}_i(x)\}$, el flujo g está dado por el sistema de ecs. diferencial:

$$\dot{x}_i = \mathbb{X}_i(x)$$

y $$L_x f = \sum_i \mathbb{X}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

por lo que el operador L_x tiene la forma:

$$L_{\mathbb{X}} = \sum_i \mathbb{X}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

El paréntesis de Poisson de dos campos vectoriales $\mathbb{X}_A$ y $\mathbb{X}_B$ es el campo vectorial:

$$\mathbb{X}_C = [\mathbb{X}_B, \mathbb{X}_A] \text{ para el cual: } L_{\mathbb{X}_C} = [L_{\mathbb{X}_B}, L_{\mathbb{X}_A}]$$

En componentes: $$[A, B]_j = \sum_i \left(B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i}\right)$$

$\mathbb{X}_B$ y $\mathbb{X}_C$

~~B y C~~

La relación entre los paréntesis de Poisson de los campos vectoriales y las funciones B y C que los definen ($\mathbb{X}_B = \text{grad } B$, $\mathbb{X}_C = \text{grad } C$) es:

$$\mathbb{X}_{[\mathbb{X}_B, \mathbb{X}_C]} = [\mathbb{X}_C, \mathbb{X}_B]$$

Como $D_{\mathbb{X}} f$ (derivada direccional de f respecto a $\mathbb{X}$ en x). (Derivada de Lie u operador de Liouville)

$$D_{\mathbb{X}} f = df(\mathbb{X})$$

$$\therefore \{f, g\} = df(\mathbb{X}_g) = D_{\mathbb{X}_g} f$$

Usando la ecuación (C) se encuentra que:

$$\{f,g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} \right)$$

Esta función tiene las siguientes propiedades.

$$\{f,g\} = -\{g,f\}$$

$$\{f+g,h\} = \{f,h\} + \{g,h\}$$

$$\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$$

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$$

Esta última se llama la identidad de Jacobi.

Es inmediato que:

$$\{q^i,q^j\} = \{p_i,p_j\} = 0$$

$$\{q^i,p_j\} = \delta^i_j$$

Si se considera a las funciones reales definidas en V como un espacio vectorial y se añade como "producto" al paréntesis de Poisson, esas forman un algebra de Lie.

Al paréntesis de Poisson se le puede asociar un operador (Liouville) definido como:

$$\{f,g\} = D_f g$$

De las propiedades del paréntesis de Poisson se sigue que:

$$D_f g = -D_g f$$

$$D_h(f+g) = D_h f + D_h g$$

$$D_f(gh) = D_f g \cdot h + g \cdot D_f h$$

$$[D_f, D_g] = D_f D_g - D_g D_f = D_{\{f,g\}}$$

En coordenadas:

$$D_f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} \right)$$

El elemento de volumen en V es:

$$dV = dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^n \wedge dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n \qquad (2n = \dim V)$$

Una transformación $S: V \to V$ que conserva el producto escalar se llama simpléctica o canónica. Formalmente:

~~Se puede~~ La forma bilineal $\omega^2 = \sum_i dp_i \wedge dq^i$ permite asociar a todo campo vectorial X una forma diferencial ω_X mediante la fórmula:

$$\omega_X = X \lrcorner\, \omega^2$$

como: $$(X \lrcorner\, \omega^2)(Y) = \omega^2(X,Y)$$

$$\omega_X(Y) = \omega^2(X,Y)$$

Al campo vectorial $X = \{A^i \frac{\partial}{\partial q^i}, B_i \frac{\partial}{\partial p_i}\}$ $\quad X = \sum_i \left[A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B_i \frac{\partial}{\partial p_i}\right]$

se le asocia la forma diferencial.

$$\omega_X = \sum_i (B_i dq^i - A^i dp_i)$$

Si $Y = \sum_i \left(\alpha^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \beta^i \frac{\partial}{\partial p_i}\right)$

$$\omega_X(Y) = \sum_i (\alpha^i B_i - A^i \beta^i) = \langle X,Y \rangle = \sum_i (A^i B_i - \alpha^i B^i)$$

$$\langle Sx, Sy\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{para todo } x, y \in V$$

Estas transformaciones forman un grupo: el $Sp(2n)$ ($\dim V = 2n$)

En términos de matrices se puede escribir:

$$\langle x, y\rangle = x \cdot J \cdot y$$

con $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en la base estandar (J es $2n \times 2n$)

Si S es simpléctica:

$$\langle Sx, Sy\rangle = \langle x, y\rangle$$

o sea: $\tilde{S} J S = J$

Nótese que $\det S = +1$ y que una transformación simpléctica transforma una base estandar en otra estandar.

3. Sistemas hamiltonianos

Espacio físico: Espacio vectorial simpléctico V de dimensión $2n$.

$V = \{q^i, p_i\}$

Construyamos la función de Hamilton: $H: V \to \mathbb{R}$

$H = H(q^i, p_i)$

Esta define un campo vectorial en V mediante su gradiente:

$$X_H = \operatorname{grad} H.$$

~~Ese campo~~ El movimiento está dado por las curvas integrales de este campo vectorial, esto es por las curvas $x = x(t)$ que satisfacen

$$\dot{x} = X_H$$

y las condiciones iniciales $x(0) = x_0$. ~~La transformación $x_0 \to x(t)$~~ Para cada $x \in V$ hay una curva integral que depende de t y de x. Llamemosla $\phi(t, x)$. Nótese que $\phi: \mathbb{R} \times V \to V$

Esta función se le llama el flujo determinado por la ecuación diferencial.

~~Es fácil ver que~~ Se puede probar que:

$$\phi(t+s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$$

en ~~los~~ donde ambos miembros estén definidos. A la familia de todas las curvas integrales se le llama el retrato físico del movimiento.

En componentes las curvas integrales están definidas por las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

La hamiltoniana es un ~~co~~ invariante del flujo ya que:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) = 0.$$

Consideremos algunos ejemplos unidimensionales.

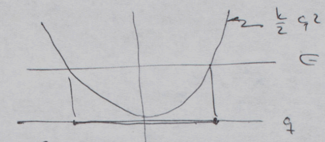
1 - El oscilador armónico.

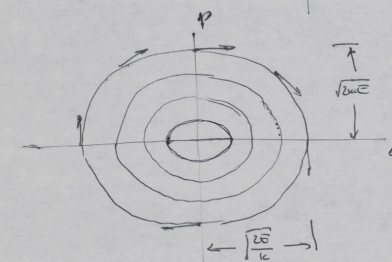
$V = \mathbb{R}^2 \qquad T = \frac{p^2}{2m} \qquad V = \frac{1}{2} k q^2$

$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2 \qquad \therefore \qquad p^2 = 2m\left(E - \frac{k}{2} q^2\right)$

$\dot{q} = \frac{p}{m}$

$\dot{p} = -kq$



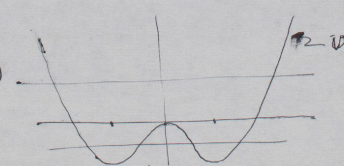


2 - Potencial con dos pozos:

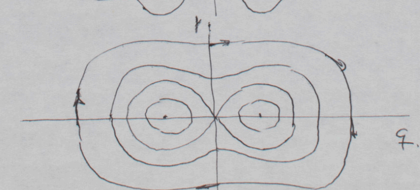
$V = \mathbb{R}^2 \qquad T = \frac{p^2}{2m} \qquad V = -q^2 + q^4 = q^2(q^2 - 1) = q^2(q+1)(q-1)$

$\dot{q} = \frac{p}{m}$

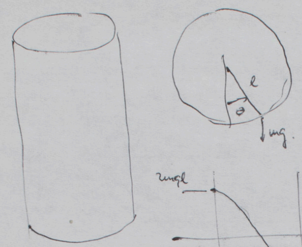
$\dot{p} = 2q(1 - 4q^2)$



$2q - 4q^3$



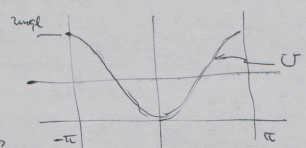
3 – El péndulo simple:

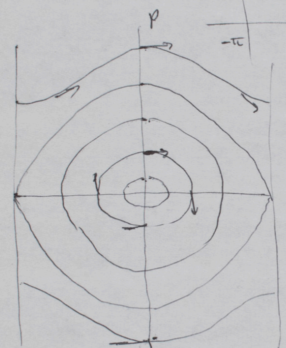


$V = S^1 \times \mathbb{R}$ $\qquad (p_\theta = m\ell^2\dot\theta)$

$T = \dfrac{p^2}{2m\ell^2} \qquad U = mg\ell\,(1-\cos\theta)$

$$E = \frac{p^2}{2m\ell^2} + mg\ell\,(1-\cos\theta)$$





$$\dot q = \frac{p}{m\ell^2}$$

$$\dot p = -mg\ell \operatorname{sen}\theta.$$

4 – Atracción coulombiana.

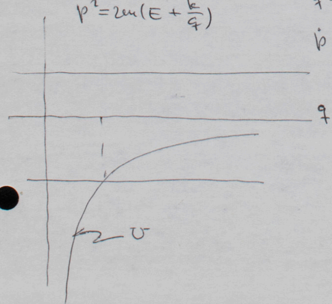
$V = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ (semiplano derecho)

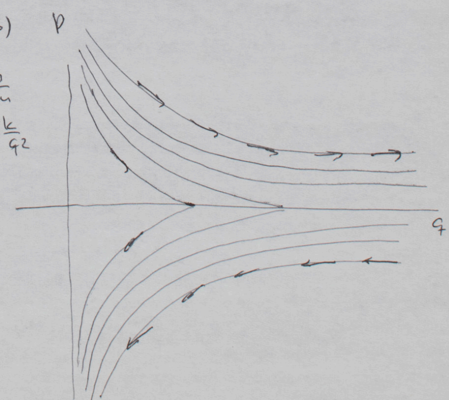
$T = \dfrac{p^2}{2m} \qquad U = -\dfrac{k}{q}$

$p^2 = 2m\left(E + \dfrac{k}{q}\right)$

$$\dot q = \frac{p}{m}$$

$$\dot p = -\frac{k}{q^2}$$





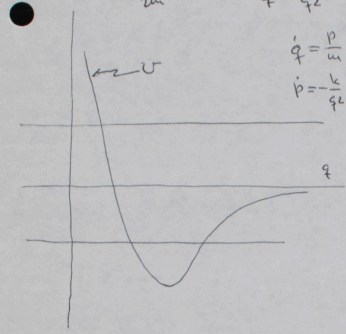
5 – Problema reducido de Kepler.

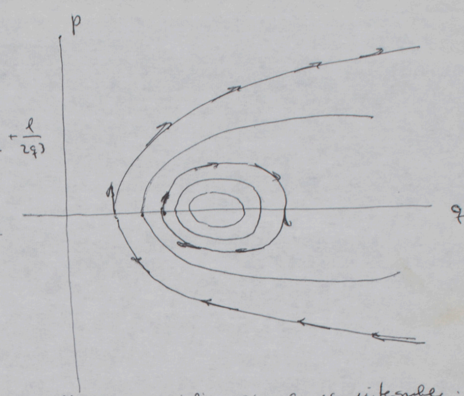
$V = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$T = \dfrac{p^2}{2m} \qquad U = -\dfrac{k}{q} + \dfrac{\ell}{q^2}$

$$\dot q = \frac{p}{m}$$

$$\dot p = -\frac{k}{q^2} + \frac{\ell}{2q^3}$$





Nótese que todo sistema hamiltoniano unidimensional es integrable.
($E = \dfrac{p^2}{2m} + U(q)$ define una curva en V)

Indicamos la conservación de la energía. Las curvas integrales están contenidas en los niveles de energía (superficies $H = E = cte$) ya que:

$$\langle \dot x, X_H \rangle = 0.$$

Esto es equivalente a $\{H, H\} = 0$. Como: $f : V \to \mathbb{R}$

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}$$

resulta que f es ~~invariante~~ constante de movimiento (invariante del flujo X_H) si

$$\{f, H\} = 0.$$

Nótese que si f y g son constantes de movimiento, $\{f, g\}$ es también constante de movimiento. (debido a la identidad de Jacobi).

Tenemos: ~~Si~~ K es un invariante del flujo X_H si y sólo si H es invariante del flujo X_K.

Esto se sigue de $\{K, H\} = -\{H, K\} = 0.$

Transformaciones canónicas

$S: V \to V$ que conserva la forma simpléctica: $B(x_1, x_2) = \langle x_1, x_2 \rangle$,
esto es, $\langle Sx_1, Sx_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$

o, en términos de matrices:

$$\tilde{S} J S = J. \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{1}$ es la unidad $n \times n$.

Estas transformaciones forman el grupo $Sp(2n)$

Ejemplos:

1 — Transf ortogonales:

$$q' = Aq \quad \text{con} \quad A^{-1} = \tilde{A}$$

Sea: $p' = Bp$. Si $S = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ resulta: $\begin{pmatrix} 0 & AB \\ -AB & 0 \end{pmatrix} = J$

$\therefore B = A^{-1} = \tilde{A}$, esto es: $p' = \tilde{A} p$.

2 – Transf. puntuales:

$$\bar{q}^i = f^i(q, t) \qquad \therefore \; d\bar{q}^i = \sum_j \frac{\partial f^i}{\partial q^j} dq^j$$

si $\sum_i d\bar{q}^i \wedge d\bar{p}_i = \sum_{ij} \frac{\partial f^i}{\partial q^j} dq^j \wedge d\bar{p}_i = \sum_j dq^j \wedge dp_j$

resulta: $dp_j = \sum_i \frac{\partial f^i}{\partial q^j} d\bar{p}_i$. De aquí se puede pedir que:

$$p_j = \sum_i \frac{\partial f^i}{\partial q^j} \bar{p}_i.$$

Nótese que: $\sum_i \bar{p}_i d\bar{q}^i = \sum_{ij} \bar{p}_i \frac{\partial f^i}{\partial q^j} dq^j = \sum_j p_j dq^j$

3 – Intercambio $q' = -p$, $p' = q$

Considere: $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Esta es canónica..

4 – El movimiento:

$$q_0 \to q(t) \qquad p_0 \to p(t)$$

conserva las ecs. de Hamilton.

$$\delta\Big(\sum_i p_i \dot{q}_i - H\Big) = \sum_i (p_i \delta\dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i) - \sum_i \Big(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\Big)$$

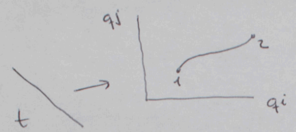
$$\int_1^2 p_i \delta\dot{q}_i \, dt = \int_1^2 p_i \, d(\delta q_i) = p_i \delta q_i \Big|_1^2 - \int_1^2 \delta q_i \, dp_i = -\int_1^2 \dot{p}_i \delta q_i \, dt$$

$$\therefore \delta\Big(\sum_i p_i \dot{q}_i - H\Big) = \sum_i \Big[\Big(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\Big)\delta p_i - \Big(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\Big)\delta q_i\Big]$$

Principio de Hamilton:

$$L = L(q^i, \dot{q}^i, t)$$

En el espacio de configuración:



$$\delta \int_1^2 L\,dt = 0.$$

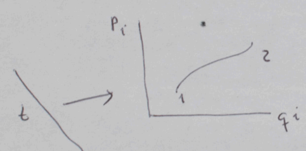
de aquí se obtienen las ecs. de mov. (Ecs de Lagrange).

Principio extendido de Hamilton (Teorema)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}^i - L$$

$$H = H(q^i, p_i, t).$$

En el espacio físico:



$$\delta \int_1^2 \omega = 0.$$

con $\omega = \sum_i p_i dq^i - H dt$

De aquí:

$$\delta \int_1^2 \omega = \int_1^2 \sum_i \left[\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \delta q^i \right] dt = 0.$$

Cambio de coordenadas:

$$\bar{\omega} = \omega + dF \qquad (F = F(q^i, p_i, t))$$

ya que $\delta \int_1^2 \bar{\omega} = \delta \int_1^2 \omega + \delta(F_2 - F_1) = \delta \int_1^2 \omega$

con F cualquiera.

Supongamos: $F = F(q^i, \bar{q}^i, t)$. Se obtiene:

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q^i}, \quad \bar{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial \bar{q}^i}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Si queremos: $G = G(q^i, \bar{p}_i, t)$

haciendo una transf. de Legendre:

$$F(q^i, \bar{q}^i, t) = G(q^i, \bar{p}_i, t) - \sum \bar{q}^i \bar{p}_i$$

se obtiene:

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q^i} \qquad \bar{q}^i = \frac{\partial G}{\partial \bar{p}_i} \qquad \bar{H} = H + \frac{\partial G}{\partial t}.$$

De la misma manera se pueden obtener otras funciones generatrices.

Ejemplos:

1 – $G = \sum_i q^i \bar{p}_i$. Genera la identidad:

$$p_i = \bar{p}_i, \quad \bar{q}^i = q_i \quad \bar{H} = H.$$

2 – $G = \sum_i f^i(q, t) \bar{p}_i$ Genera las transf. puntuales:

$$\bar{q}^i = f^i(q, t), \quad p_i = \sum_j \frac{\partial f^i}{\partial q^j} \bar{p}_j, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial G}{\partial t}.$$

3 – $F = \sum_i q^i \bar{q}^i$ Genera el intercambio:

$$p_i = \bar{q}^i, \quad \bar{p}_i = -q^i, \quad \bar{H} = H$$

EJEMPLOS:

1 – El oscilador armónico unidimensional
2 – El oscilador bidimensional.
3 – El péndulo esférico
4 – El problema de Kepler.

Transformaciones infinitesimales.

$$\bar{q}^i = q^i + \Delta q^i, \quad \bar{p}_i = p_i + \Delta p_i$$

Están generadas por:

$$G = \sum_i q^i \bar{p}_i + \epsilon g(q^i, \bar{p}_i) \simeq \sum_i q^i \bar{p}_i + \epsilon g(q^i, p_i)$$

Resulta:

$$p_i = \bar{p}_i + \epsilon \frac{\partial g}{\partial q^i}, \quad \bar{q}^i = q^i + \epsilon \frac{\partial g}{\partial \bar{p}_i} \simeq q^i + \epsilon \frac{\partial g}{\partial p_i}$$

$\therefore \Delta q^i = \epsilon \dfrac{\partial g}{\partial p^i}$ $\quad\quad \Delta p_i = -\epsilon \dfrac{\partial g}{\partial q^i}$

Si $g = H(q^i, p_i)$ $\quad \epsilon = dt \quad$ resulta:

$\Delta q^i = dt \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = dq^i \quad , \quad \Delta p_i = -dt \dfrac{\partial H}{\partial q^i} = dp_i$

$\therefore$ La hamiltoniana genera el movimiento. $(\; G = 1 + H dt \;)$

Calculemos el cambio de una función $f: V \to R$

$$\Delta f = f(q^i + \Delta q^i, p_i + \Delta p_i) - f(q^i, p_i) = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \Delta q^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \Delta p_i \right) =$$

$$= \epsilon \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) = \epsilon \{f, g\}$$

$\therefore \quad \Delta f = \epsilon \{f, g\}$

En particular: $\quad df = dt \{f, H\} \quad$ o sea $\quad \dfrac{df}{dt} = \{f, H\}$. como antes!

$$\left(\{f, H\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}^i \right) = \frac{df}{dt} \right).$$

$G = 1 - H \Delta t.$

$p_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \Delta t \quad\quad q_i = -\dfrac{\partial H}{\partial p_i} \Delta t.$ $\quad\quad G = e^{Ht}$

$\dfrac{\partial G}{\partial q_i} = G \dfrac{\partial H}{\partial q_i}$

OSCILADOR ARMONICO

$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$ $\quad\quad (q, p) \to (\theta, I)$

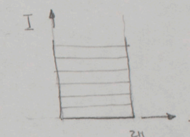
$q = \sqrt{\dfrac{2I}{\omega}} \operatorname{sen}\theta \quad\quad p = \sqrt{2\omega I} \cos\theta$

$dq = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{\omega I}} \operatorname{sen}\theta \, dI + \sqrt{\dfrac{2I}{\omega}} \cos\theta \, d\theta$

$dp = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2\omega}{I}} \cos\theta \, dI - \sqrt{2\omega I} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$ $\quad \therefore \; dq \wedge dp = \operatorname{sen}^2\theta \, dI \wedge d\theta - \cos^2\theta \, d\theta \wedge dI = dI \wedge d\theta$

$H = \frac{1}{2}(2\omega I \cos^2\theta + 2\omega I \operatorname{sen}^2\theta) = I\omega$

$\dot\theta = \omega \quad\quad \dot I = 0 \quad\quad \therefore \; I = cte. \quad\quad \theta = \omega t + \theta_0$



Solución: $\quad q = A \operatorname{sen} \omega t \quad\quad E = \frac{1}{2}\omega^2 A^2 \;\therefore\; A = \dfrac{\sqrt{2E}}{\omega}$

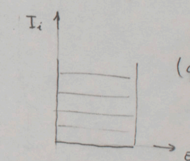
OSCILACIONES ARMÓNICAS EN UN PLANO (Oscilador bidimensional).

Se trata de un "semicilindro" con su "base" identificada en un punto.

$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2)$ $\quad\quad (\omega_1 \neq \omega_2)$

$M = R4 - \{I_1, I_2 \text{ cero}\}$ (línea.)

$H = H_1 + H_2 \quad\quad H_1 = E_1 = cte \quad\quad H_2 = E_2 = cte$



$I_i \neq 0$ (cilindro).

$q_1 = A_1 \operatorname{sen} \omega_1 t \quad\quad q_2 = A_2 \operatorname{sen} \omega_2 t$

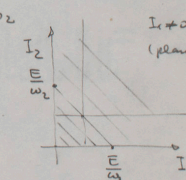
$p_1 = A_1 \omega_1 \cos\omega_1 t \quad\quad p_2 = A_2 \omega_2 \cos\omega_2 t$

$q_1 = \sqrt{\dfrac{2I_1}{\omega_1}} \operatorname{sen}\theta_1 \quad\quad q_2 = \sqrt{\dfrac{2I_2}{\omega_2}} \operatorname{sen}\theta_2$

$p_1 = \sqrt{2\omega_1 I_1} \cos\theta_1 \quad\quad p_2 = \sqrt{2\omega_2 I_2} \cos\theta_2$

$\Big\} \quad H = I_1\omega_1 + I_2\omega_2$

$I_i \neq 0$ (plano)



$E = I_1\omega_1 + I_2\omega_2$

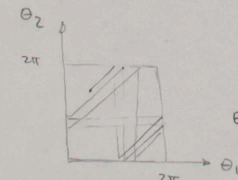
$H_1 = cte \quad , \quad H_2 = cte$

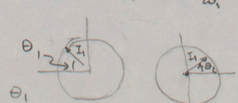
Una tercera constante de movimiento (2 funciones en involución: H, H_3)

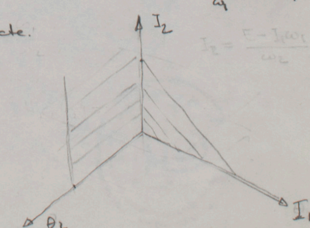
$H_3 = \omega_1\theta_2 - \omega_2\theta_1 \quad\quad \{H, H_3\} = +\omega_1\omega_2 - \omega_1\omega_2 = 0.$ ✓

$\therefore \; H_3 = \omega_1\theta_2 - \omega_2\theta_1 = k = cte.$

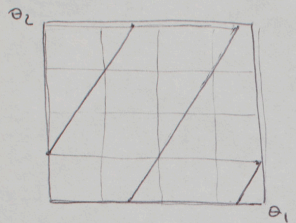
$\therefore \; \theta_2 = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}\theta_1 + \dfrac{k}{\omega_1}$

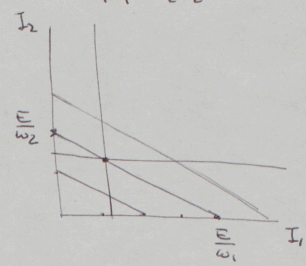




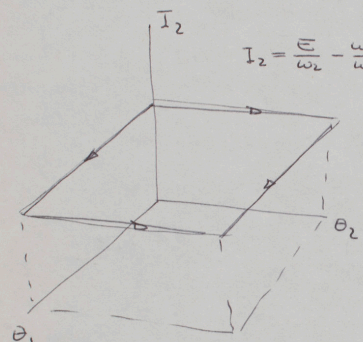


Caso $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$ $\qquad \theta_2 = 2\theta_1 + c$ $\qquad I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = E$

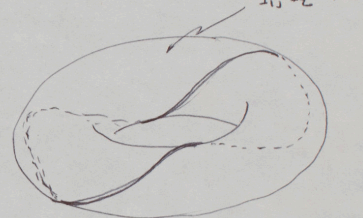




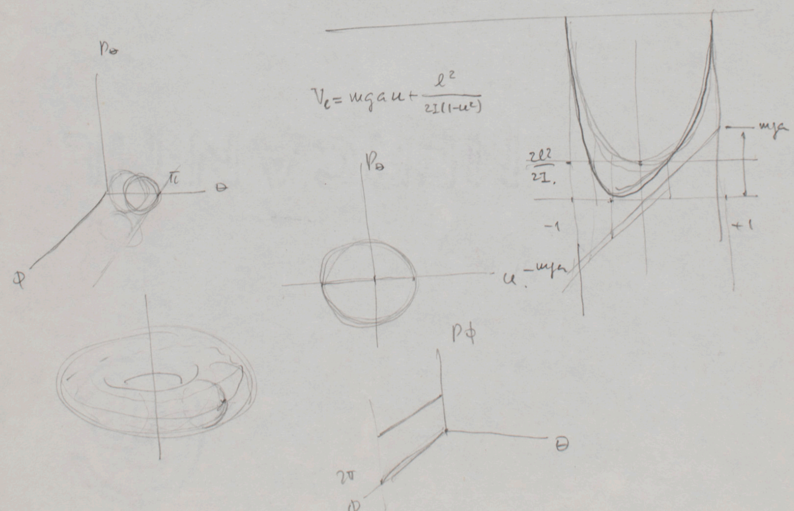
$I_2 = \frac{E}{\omega_2} - \frac{\omega_1}{\omega_2} I_1$



$I_1, I_2 \to E$

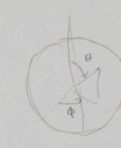


$V_\ell = mgau + \frac{\ell^2}{2I(1-u^2)}$



PÉNDULO ESFÉRICO

$$L = \frac{ma^2}{2}(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\phi^2) - mga\cos\theta$$

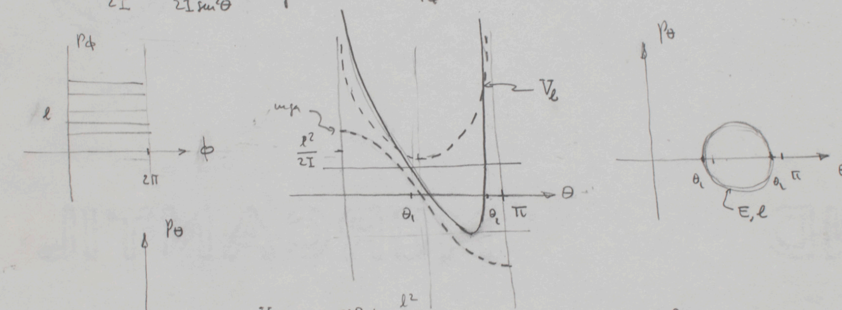


$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = ma^2\dot\theta = I\dot\theta \qquad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = ma^2\sin^2\theta\,\dot\phi = I\sin^2\theta\,\dot\phi$$

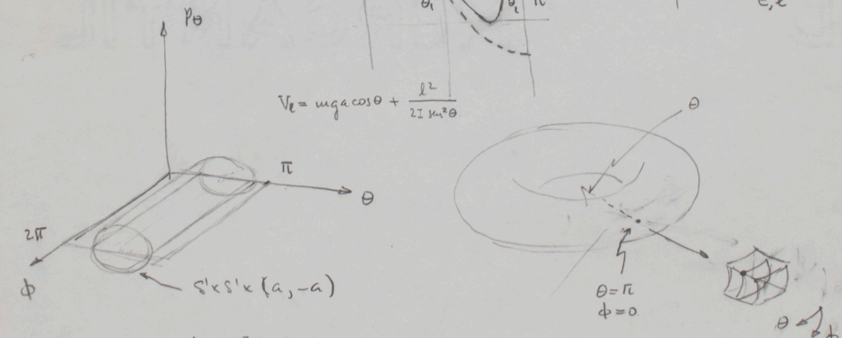
$$H = \frac{p_\theta^2}{2I} + \frac{p_\phi^2}{2I\sin^2\theta} + mga\cos\theta$$

$$\dot\theta = \frac{p_\theta}{I} \checkmark \qquad \dot\phi = \frac{p_\phi}{I\sin^2\theta} \checkmark \qquad \dot p_\theta = \frac{p_\phi^2\cos\theta}{I\sin^3\theta} + mga\sin\theta \qquad \dot p_\phi = 0$$

$$H = E = \frac{p_\theta^2}{2I} + \frac{p_\phi^2}{2I\sin^2\theta} + mga\cos\theta \qquad p_\phi = \ell = ma^2\sin^2\theta\,\dot\phi$$



$V_\ell = mga\cos\theta + \frac{\ell^2}{2I\sin^2\theta}$

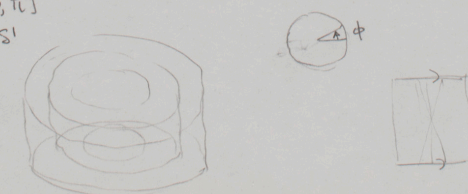


$0 \le \theta \le \pi \qquad [0,\pi]$

$0 \le \phi < 2\pi \qquad S^1$

$-h \le p_\theta \le h$

$S^2 \times (-h, h)$

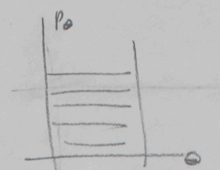


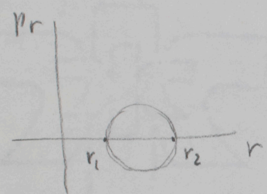
$T = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2)$ $\qquad V = +\frac{k}{2}r^2$

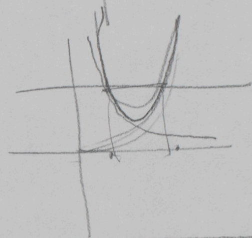
$L = T - V \qquad P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \qquad P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta = \ell.$

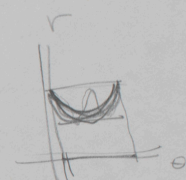
$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + \frac{k}{2}r^2$

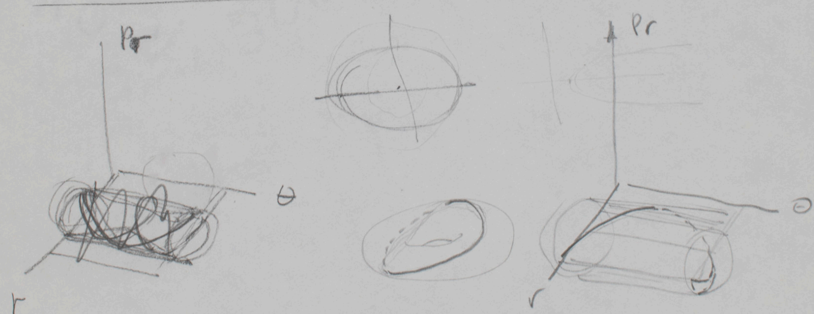
$E = \frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}r^2$











$T = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2)$ $\qquad \dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2}$

$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot r} = m\dot r$

$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta = \ell$ $\qquad T = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right)$ ✓

PROBLEMA DE KEPLER

Sistema mecánico de tres grados de libertad: $V = -\frac{k}{r}$

$n = 3, \quad M = \mathbb{R}^6 - \{0\}$

$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} = E = \text{cte}.$

$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \text{cte} \qquad \vec{K} = \vec{p} \wedge \vec{L} - \frac{mk}{r}\vec{r} = \text{cte}$

con las restricciones: $\vec{K}\cdot\vec{L} = 0$, $K^2 = 2mHL^2 + m^2k^2$

Se tienen cinco constantes independientes que definen completamente la órbita.

Estudiemos el problema en un plano. Entonces

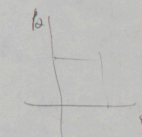
$\vec{K}\cdot\vec{r} = L^2 - mkr \quad \therefore \quad r = \frac{\ell^2}{|K|\cos\varphi + mk} \quad \therefore \ \varphi = \text{ángulo entre } \vec{K} \text{ y } \vec{r}$

$M = \mathbb{R}^4 - \{0\}$ con las variables: r, θ, p_r, p_θ

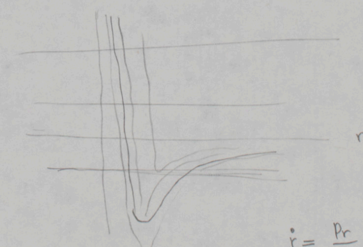
$E = \frac{1}{2m}(p_r^2 + p_\theta^2) - \frac{k}{r}$

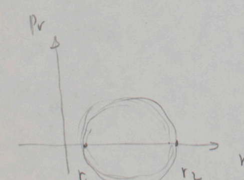
$\ell = |\vec{L}| = \cancel{k}p_\theta$ y $\vec{K}\cdot\vec{r} = \ell^2 - mkr$ donde $\vec{K}$ es un vector fijo en el plano que tomamos como el eje polar.

La curva es simétrica respecto a $\underline{K}$



$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$





$\dot r = \frac{p_r}{m}$

$L = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) + V(r)$ $\qquad \dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2} = \frac{\ell}{mr^2}$

$p_\theta = mr^2\dot\theta = \ell \qquad p_\theta = \cancel{m}r^2\dot\theta$

$\boxed{\dot p_r = +\frac{\ell^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2}}$ $\qquad r^{-2} \qquad p_\theta^2 = r^4\dot\theta^2$ $\qquad \boxed{H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r}}$

$\dot p_\theta = 0.$ $\qquad -\frac{1}{r^2}$ $\qquad \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = 0.$

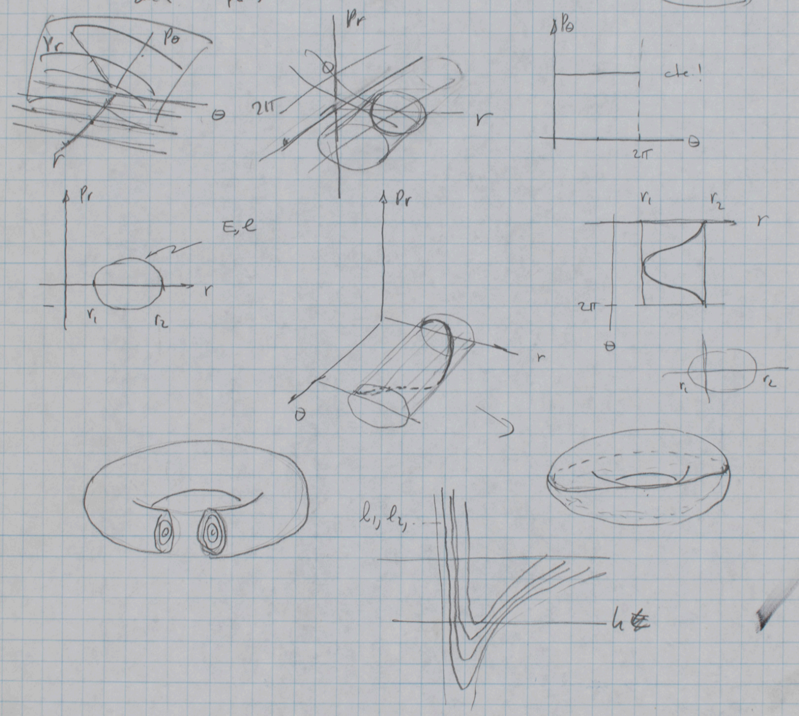
~~Se supone que un sistema de dos grados de libertad con una coordenada cíclica siempre es integrable~~

Caso de un potencial central: $V=V(\vec{r})$. Como el movimiento es plano:

$M = E \times \mathbb{R}^2$ $\qquad E = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ $\qquad$ Coord. polares r, θ $\qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$

$T = \dfrac{p_r^2}{2m} + \dfrac{p_\theta^2}{2m r^2}$ $\qquad V = V(r)$ $\qquad \theta$ es cíclica. H es invariante frente a $O^+(2)$.

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + V(r) = h = \text{cte} \qquad p_\theta = l = \text{cte.} \qquad l = m r^2 \dot{\theta}$$



Espacios vectoriales de dimensión finita.

~~V es un espacio vectorial si Un conjunto V~~ V es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ si

i) En V está definida la suma: $V \times V \to V$ bajo la cual V es un grupo abeliano.

ii) En V está definido el producto por un escalar: $\mathbb{R} \times V \to V$ con las propiedades:

$$a(x+y) = ax + ay$$
$$(a+b)x = ax + bx$$
$$(ab)x = a(bx)$$
$$1x = x.$$

Un subconjunto no vacío W de V es un subespacio de V si es cerrado bajo las operaciones definidas en V.

Un conjunto de vectores $\{e_i\}$ genera V si todo $v \in V$ es una combinación lineal de ellos, esto es si:

$$v = \sum_i v^i e_i$$

o sea $\exists v^i \in \mathbb{R}$ tales que (1) es válida.
V es de dimensión finita si existe un conjunto finito de vectores que lo genera. En adelante todo espacio V será de dim finita.
Un conjunto de vectores $\{v_i\}$ se llama linealmente independiente si

$$\sum a^i v_i = 0$$

implica $a^i = 0$ para toda i

Una base en V es un conjunto ordenado de vectores de V, linealmente independiente, que genera a V

Se puede probar que todos espacios vectoriales de la misma dimensión son isomorfos.

Así cualquier espacio vectorial de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{R}^n$. En este existe la base standard:
$e_i = \{0, 0 \ldots, 1, 0 0 0\}$, $i = 1, \ldots, n$. Y se acostumbra llamar un sistema de coordenadas en un espacio vectorial V a un isomorfismo $\varphi: V \to \mathbb{R}^n$.

Construyamos el espacio vectorial dual, V^*. Este está formado por las funciones lineales definidas sobre V esto es: $\omega \in V^*$ si $\omega: V \to \mathbb{R}$ y

$$\omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y), \quad \omega(ax) = a\,\omega(x).$$

Este es un espacio vectorial con las operaciones:

$$(\omega_1 + \omega_2)(x) = \omega_1(x) + \omega_2(x)$$
$$(a\omega)(x) = a\,\omega(x)$$

Si $\{e_i\}$ es una base de V, se define la base dual $\{x^i\}$ mediante las condiciones

$$x^i(e_j) = \delta^i{}_j \qquad (1).$$

Es claro que V^* es de dimensión n.

Como $v = \sum_i v^i e_i$ y $\omega = \sum_i a_i x^i$ se sigue de (1) que

$$\omega(v) = a_i v^i$$

Sean V y W dos espacios vectoriales (de dim n y m respectivamente).

Una función lineal $F: V \to W$ es tal que:

$$F(v_1+v_2) = F(v_1) + F(v_2) \quad \text{para todo } v_1, v_2 \in V \text{ y}$$
$$F(av) = a\,F(v) \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R},\ v \in V$$

Todo mapeo lineal F determina una matriz $(m \times n)$ respecto a una base $\{e_i\}$ de V y $\{f_j\}$ de W que queda definida por $F(e_i) = M_i{}^j f_j$. $M_i{}^j$ es una matriz $n \times m$. En términos de esto

$$F(v) = F(v^i e_i) = v^i F(e_i) = M_i{}^j v^i f_j = F^j f_j$$

ya que: $F(e_i) = M_i{}^j f_j$

De aquí $F^j = M_i{}^j v^i$

Un mapeo lineal define dos subespacios importantes:

1- El núcleo de F $\quad \mathrm{Ker}\,F = F^{-1}(0) = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$. (espacio nulo)

2- La imagen de F $\quad \mathrm{Im}\,F = F(V) = \{w \in W \mid F(v) = w \text{ para algún } v \in V\}$

Se puede probar que

$$\dim(\mathrm{Im}\,F) + \dim(\mathrm{Ker}\,F) = \dim V$$

En particular si $\dim V = \dim W$, las afirmaciones

i) $\mathrm{Ker}\,F = 0$.
ii) $\mathrm{Im}\,F = W$
iii) F es un isomorfismo.

son equivalentes.

Una función bilineal en V es un mapeo

$$B: V \times V \to \mathbb{R}$$

que es lineal en cada factor (manteniendo el otro fijo)

Con esto se puede introducir la relación de ortogonalidad: $x \perp y$ si $B(x,y) = 0$

Si se desea que esta relación sea simétrica (esto es $x \perp y$ equivalente a $y \perp x$), la función B sólo puede ser simétrica o antisimétrica. La primera define la geometría ortogonal y la segunda la simpléctica.

Una función bilineal permite introducir un producto escalar natural.

$$\langle x_1, x_2 \rangle = B(x_1, x_2)$$

$$\begin{pmatrix} A_1{}^1 & A_1{}^2 & \cdots \\ A_2{}^1 & A_2{}^2 & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

$$v = v^i e_i$$

$\longrightarrow$ $e'_i = A_i{}^j e_j$ $\qquad e_i = (A^{-1})_i{}^j e'_j$

$$A_i{}^j (A^{-1})_j{}^k = \delta_i{}^k$$

$$v = v^i (A^{-1})_i{}^j e'_j = v'^j e'_j$$

$Av = (Av)^i e_i$

$(Av)^i = A^i{}_j v^j$

$A_j{}^k v'^j = (A^{-1})_i{}^j A_j{}^k v^i$ $\qquad \boxed{v'^j = (A^{-1})_i{}^j v^i}$

$$\omega = a_i x^i$$

$$x^i(e_j) = \delta^i{}_j$$

$$\omega(v) = a_i x^i (v^j e_j) = a_i v^i$$

$$a_i v^i = a_i A_j{}^i v'^j = a'_j v'^j$$

$\boxed{a'_j = A_j{}^i a_i}$ ✓ $\qquad A_i{}^j x'^i = A_i{}^j (A^{-1})_k{}^i x^k$

$\longrightarrow$ $x'^i = (A^{-1})_j{}^i x^j$ $\qquad x^i = A_j{}^i x'^j$

$\omega(Av) = (B\omega)(v)$ $\qquad (Av)^i = A_j{}^i v^j$

$\omega(Av) = a_i A_j{}^i v^j$ $\quad \therefore \quad (B\omega)_i = A_i{}^j a_j$

$$\therefore B = \tilde{A}$$

Algunos errores.
Ver Gel'fand, Cap. IV

VECTORES Y COVECTORES

Sea V un espacio vectorial de dimensión n. En términos de la base e_i, toda $v \in V$ puede escribirse como:

$$v = v^i e_i. \tag{1}$$

Los números v^i se llaman las componentes (contravariantes) de v respecto a la base e_i; caracterizan completamente a v, por lo que puede escribirse:

$$v = \{v^i\}$$

Si se cambia de base: $\{e_i\} \mapsto \{e_{i'}\}$, esto es:

$$\{e_{i'}\} = A\{e_i\}$$

o sea:

$$e_{i'} = A_{i'}{}^{j} e_j$$

donde $A = \|A_i{}^j\| \in GL_n$, las componentes cambian de acuerdo con la regla:

$$x^{j'} = (A^{-1})_i{}^{j'} x^i \tag{2}$$

(transformación contravariante o transpuesta) ya que:

$$v = v^i e_i = v^i (A^{-1})_i{}^{j'} e_{j'} = v^{j'} e_{j'}$$

Construyamos el espacio dual V^*. Este está formado por las funciones lineales $\omega : V \to \mathbb{R}$, dotadas de la estructura de espacio vectorial. V^* es isomorfo a V y los elementos $\omega \in V^*$, llamados covectores, se pueden expresar de manera única como:

$$\omega = a_i x^i, \tag{3}$$

donde $\{x^i\}$ es la base dual, definida como:

$$x^i(e_j) = \delta_j{}^i \tag{4}$$

A los números a_i se les llama las componentes (covariantes) de ω respecto a la base x^i; éstos caracterizan completamente a ω, por lo que puede escribirse:

$$\omega = \{a_i\}.$$

De (1) y (3) se sigue que:

$$\omega(v) = a_i x^i (v^j e_j) = a_i v^i \tag{5}$$

Si se cambia de base esta expresión permanece invariante. Por lo tanto, A induce una transformación en las componentes de ω dada por la regla:

$$a_{i'} = A_{i'}{}^{j} a_j \tag{6}$$

(transformación covariante) ya que:

$$\omega(v) = a_i v^i = a_i A_{j'}{}^{i} v^{j'} = a_{j'} v^{j'}$$

La base dual se transforma de acuerdo con la regla:

$$x^{i'} = (A^{-1})_k{}^{i'} x^k \tag{7}$$

ya que:

$$\omega = a_i x^i = (A^{-1})_i{}^{i'} a_{i'} x^i = a_{i'} x^{i'}$$

Resumiendo: una transformación $A : V \to V$, $A \in GL_n$, determina otra, $A^{-1} : V^* \to V^*$ con la propiedad:

$$A^{-1} = \tilde{A} \qquad \left((A^{-1})_j{}^i = A^i{}_j \right)$$

ya que:

$$(A^{-1}\omega)(v) = \omega(Av). \tag{8}$$

Este es un caso particular de la transformación transpuesta (retroacción) que puede definirse como sigue: sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita y $\omega' : W \to \mathbb{R}$. La transformación $f : V \to W$ induce la retroacción $f^* : W^* \to V^*$ mediante la fórmula:

$$(f^*\omega')(v) = \omega'(f^*(v)) \tag{9}$$

La matriz correspondiente a f^* es la transpuesta de f, ya que:

$$\omega'(f^*(v)) = \alpha_i (f^*(v))^i = \alpha_i f^{*i}{}_j v^j = (\tilde{f}_j{}^i)\alpha_i v^j = (f^*\omega')_j v^j = (f^*\omega')(v)$$

$$\therefore \quad (f^*)_j{}^i = f^i{}_j.$$

Se puede establecer un isomorfismo entre V y $(V^*)^*$, que permite identificarlos, de la manera siguiente: si $\Omega : V^* \to \mathbb{R}$, los elementos Ω del dual del dual ($\Omega \in (V^*)^*$), se hacen corresponder a los de V exigiendo que

$$\Omega(\omega) = \omega(v), \tag{10}$$

esto es, que:

$$\Omega(x^i) = v^i.$$

Supongamos ahora que en V se ha definido una forma bilineal Φ, esto es, que existe $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$, lineal en cada uno de sus argumentos. En términos de una base, éste está definido por los n^2 números:

$$g_{ij} = \Phi(e_i, e_j)$$

ya que, de (1):

$$\Phi(v,w) = g_{ij} v^i w^j \qquad (11)$$

($v = v^i e_i$, $w = w^i e_i$). Esta forma permite definir el producto escalar mediante la igualdad:

$$\langle v, w \rangle = \Phi(v,w)$$

y la norma de v como:

$$|v| = +\sqrt{\Phi(v,v)}$$

Se puede introducir un isomorfismo (lineal) entre V y V^*, $\varphi : V \to V^*$, mediante:

$$\varphi(v)(w) = \Phi(v,w). \qquad (12)$$

De (11) se sigue:

$$\varphi(v)(w) = g_{ij} v^i w^j = \cancel{v^i w_j} = v_j w^j,$$

si se define:

$$\cancel{w_j = g_{jk} w^k}, \qquad v_j = g_{ij} v^i \qquad (13)$$

llamadas componentes covariantes del vector $\overset{v}{\cancel{w}}$). Nótese que:

$$\overset{v_j}{\cancel{w_i}} = \Phi(e_i, e_j) \overset{v^i}{\cancel{w^j}} = \Phi(\overset{v}{\cancel{e_i}}, \overset{e_j}{\cancel{w}}) = \overset{\langle v, e_j \rangle}{\cancel{\langle e_i, w \rangle}}.$$

De esta manera puede identificarse $\varphi(v)$ y ω y caracterizar a esta última como $\omega = \{v_i\}$, con lo que se describe al covector ω con la información del vector v correspondiente; se habla entonces de dos tipos de componentes de v: las contravariantes $\{v^i\}$ y las covariantes $\{v_i\}$. La relación entre ellas está dada por la ecuación (13). Esta se puede invertir definiendo las matrices:

$$G = \|g_{ij}\| \quad \text{y} \quad G^{-1} = \|g^{ij}\| \qquad (g_{ij} g^{jk} = \delta_i{}^k)$$

de las que se obtiene:

$$v^i = g^{ij} v_j. \qquad (14)$$

La Geometría Simpléctica

Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Construyamos el espacio vectorial producto:

$$M = V \times V.$$

Este es un espacio de dimensión $2n$ que consideraremos "equivalente" a un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$. En él definimos una forma bilineal antisimétrica no degenerada:

$$\Phi : M \times M \to \mathbb{R}.$$

Escribiremos los elementos $x \in M$ como $x = \{q^i, p^i\}$, con $i = 1, \dots, n$ y definiremos el producto escalar (simpléctico) como:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \Phi(x_1, x_2) \qquad (1)$$

Este producto tiene las propiedades:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = - \langle x_2, x_1 \rangle$$

y

$$\langle x, x \rangle = 0 \quad \text{para toda } x \in M.$$

Diremos que x_1 y x_2 son ortogonales si $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ y definiremos el complemento ortogonal de x (plano nulo o kernel de x) como:

$$N(x) = \{ y \mid \langle x, y \rangle = 0 \}.$$

Nótese que todo elemento $x \in M$ pertenece a su complemento ortogonal. Como el producto escalar es no degenerado, el complemento ortogonal de un vector es un hiperplano de dimensión $2n-1$.

El producto exterior de dos covectores ω_1, ω_2 se define mediante la fórmula:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \omega_1(x_1) & \omega_2(x_1) \\ \omega_1(x_2) & \omega_2(x_2) \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Mediante él podemos definir la estructura simpléctica natural construyendo la forma bilineal:

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^{n} q^i \wedge p^i \qquad (3)$$

El producto escalar es, entonces:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \sum_i (q^i \wedge p^i)(x_1, x_2) = \sum_i [q^i(x_1) p^i(x_2) - q^i(x_2) p^i(x_1)]$$

o sea: $$\langle x_1, x_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} (q_1^i p_2^i - q_2^i p_1^i) . \qquad (4)$$

Con ayuda de éste podemos construir la base simpléctica (estandard). Esta es el conjunto de $2n$ vectores $\hat{q}_i, \hat{p}_i$ tales que:

$$\langle \hat{q}_i, \hat{q}_j \rangle = \langle \hat{p}_i, \hat{p}_j \rangle = 0 \quad \text{para toda } i, j .$$
$$\text{y} \quad \langle \hat{q}_i, \hat{p}_j \rangle = \delta_{ij} \qquad (5)$$

Esta se sigue de (3). Se puede probar que en todo espacio simpléctico existe una base simpléctica, de lo que se sigue que todo espacio simpléctico es de dimensión par y que todos los espacios simplécticos de la misma dimensión son isomorfos.

Una transformación $S: M \to M$ se llama simpléctica si preserva la forma bilineal (1), esto es, si:

$$\langle S x_1, S x_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle \quad \text{para toda } x_1, x_2 \in M .$$

Las transformaciones simplécticas también se llaman canónicas y forman el grupo $Sp(2n)$.

Las matrices de las transformaciones simplécticas relativas a la base simpléctica satisfacen la relación:

$$\tilde{S} J S = J \qquad (6)$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1 \text{ es la unidad } n \times n).$$

Para probar esta afirmación basta escribir el producto escalar como un producto matricial, esto es:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = x_1 \cdot J x_2$$

y notar que $S x_1 \cdot J S x_2 = x_1 \cdot J x_2$ implica (6).

De (6) se sigue que:

$$\det S = +1 \qquad (7)$$

Puede probarse que una transformación es simpléctica si y sólo si transforma bases simplécticas en simplécticas. De éste teorema se sigue que todo vector de M puede transformarse en otro de M mediante una transformación simpléctica. Sin embargo, no todo plano de M puede llevarse a otro; por ejemplo, el (p_1, p_2) no puede llevarse al (q_1, p_1).

Para extender la geometría simpléctica a un espacio que únicamente sea R^{2n} localmente, habrá que reinterpretar (3) como:

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp^i$$

LA ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI

La estructura del espacio físico está dada por la forma diferencial 1:

$$\theta = p\,dq.$$

Intentemos ahora describir a ésta como exacta, esto es, supongamos que existe $S = S(q)$ tal que

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \qquad (A)$$

Consideremos el espacio q, p, S y definamos en él una función real Φ con la que estableceremos que

$$\Phi(q, p, S) = C \qquad (C = \text{cte})$$

Esta función define una superficie en el espacio considerado. Seleccionemos un punto de ella y consideremos allí su espacio tangente. Un vector de él tiene las componentes v_q, v_p, v_S, por lo que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_q v_q + \Phi_p v_p + \Phi_S v_S = 0$$

De (A) se sigue las trayectorias deben estar en el plano de contacto:

$$v_S = p\, v_q$$

ya que $dS = p\,dq$. Se sigue entonces que:

$$(\Phi_q + p\,\Phi_S)\, v_q + \Phi_p v_p = 0. \qquad (B)$$

Las componentes de la velocidad en el plano q, p (espacio físico) son $\dot{q}$ y $\dot{p}$ y éstas deben estar en el complemento ortogonal de la proyección qp del vector tangente, esto es, deben satisfacer que

$$\dot{q} v_p - \dot{p} v_q = 0. \qquad (C)$$

De ésta y (B) se sigue que

$$\dot{q} = \Phi_p$$
$$\dot{p} = -\Phi_q - p\,\Phi_S$$

Si Φ no contiene explícitamente a S, estas ecuaciones son las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q} = \frac{\partial \Phi}{\partial p}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial q}$$

Como estas ecuaciones definen las características de la ecuación diferencial:

$$\Phi = C,$$

habrá que identificar Φ con la función característica de Hamilton y C con la energía. De aquí que

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E.$$

LA ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI

Consideremos un sistema mecánico descrito por la Hamiltoniana

$$H = H(q^i, p_i)$$

Las trayectorias están descritas por las ecuaciones:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \qquad (A)$$

La estructura del espacio fásico está dada por la forma diferencial:

$$\theta = p_i\, dq^i$$

La forma diferencial asociada al campo vectorial Hamiltoniano (las componentes de dH) son:

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} \,,\, \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

El problema ahora es encontrar la función $S = S(q^i)$ (función característica de Hamilton) tal que:

$$\theta = dS$$

Resulta de inmediato que $p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}$ (ya que $dS = p_i dq^i$)

La solución está dada por la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$H\left(q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}\right) - E = 0$$

ya que las curvas características de esta ecuación son las ecs. de Hamilton (A).

Note que esta solución está basada en que θ sea cerrada ($d\theta = 0$)

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE PRIMER ORDEN

La ecuación se escribe como

$$F(q^i, p_i, z) = 0$$

con $p_i = \frac{\partial z}{\partial q^i}$.

La solución es $z = z(q^i)$

El problema se replantea de la siguiente manera:

a) Como $dz = \frac{\partial z}{\partial q^i} dq^i = p_i dq^i$, resulta $dz - p_i dq^i = 0$ (1)

b) $dF = \frac{\partial F}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0$

Usando el resultado anterior se obtiene:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q^i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}\right) dq^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i = 0 \qquad (2)$$

c) De (1): $dp_i \wedge dq^i = 0$ (3)

El problema consiste ahora en encontrar dq^i, dp_i y dz.

<u>Método de las características.</u>

Supongamos que $q^i = q^i(t)$ (curvas características)

Entonces $dq^i = \dot{q}^i dt$ y (3) se cumple automáticamente. El campo vectorial correspondiente a la forma diferencial (2) es:

$$\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial p_i} \qquad \therefore \quad \dot{q}^i = \frac{\partial F}{\partial p_i} \quad y \quad -\dot{p}_i = \frac{\partial F}{\partial q^i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\therefore \; dz = p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} dt \quad , \quad dq^i = \dot{q}^i dt \quad , \quad dp_i = \dot{p}_i dt$$

El problema ahora será resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q^i} - p_i \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\frac{dz}{dt} = p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE PRIMER ORDEN

Consideremos $\mathbb{R}^n$. La ec. dif. parcial de 1er orden general para $z = z(x^i)$ es

$$F(x^i, z, p_i) = 0 \qquad (1)$$

en donde $p_i \equiv \partial_i z$. Se trata de encontrar $z: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaga idénticamente (1).

Un ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, es $zp_1 + p_2 = 0$, cuya solución es $z = \varphi(zx_2 - x_1)$ con φ arbitraria.

(1) es casilineal si F es lineal en las cantidades p_i, esto es:

$$F = \sum_{j=1}^{n} a_j(x^i, z)\, p_i - b(x^i, z) = 0.$$

y lineal si:

$$F = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x^i)\, p_i - \beta(x^i) z - \gamma(x^i) = 0.$$

Solución por el método de características.

Se trata de encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, llamadas las ecuaciones características, equivalente a (1). Para esto consideremos en $\mathbb{R}^{n+1}$ la superficie:

$$g = g(x^i, z) \equiv z(x^i) - z = 0. \qquad (2).$$

La dirección normal en el punto (x^i, z) está dada por $(p_i, -1)$. Se puede considerar (1) como la condición que debe satisfacer esta dirección para cualquier superficie que sea solución de (1) que pase por $P = (x^i, z)$

De (2):

$$dg = 0 = \sum_i \partial_i z\, dx^i - dz = \sum_i p_i\, dx^i - dz \qquad \therefore\ dz = \sum_i p_i dx^i \quad (3)$$

$$dF = 0 = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} \right) dx^i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i$$

Considerando (como solución de la ec. anterior)

$F = F(x^i, p_i)$ y parametrizando ? $x^i = x^i(s)$ $p_i = p_i(s)$ (trayectorias en la sup F)

$$\frac{dF}{ds} = 0 = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp^i}{ds}$$

SISTEMAS GRADIENTES

$V = \mathbb{R}^n$ En él está definido el producto escalar (simétrico, positivo definido).

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} x_i x_j$$

$$(\operatorname{grad} f)_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \quad \text{con} \quad \|h_{ij}\| = \|g_{ij}\|^{-1}, \text{ esto es: } \sum_k g_{ik} h_{kj} = \delta_{ij}$$

ya que:

$$\langle \operatorname{grad} f, y \rangle = Df(x) \cdot y = \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_x y_i$$

$$\langle \operatorname{grad} f, y \rangle = \sum_{i,j,k} g_{ij} h_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\, y_j = \sum_j \left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_x y_j$$

Sea: $X = \operatorname{grad} f$ y $\dot{x} = X$ con

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y buscar: $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$\frac{df}{dt}[x(t)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i,j,k,l} h_{kl} g_{li} h_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_j} =$$

$$= \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle = |\operatorname{grad} f|^2$$

SISTEMA HAMILTONIANO

$V = \mathbb{R}^{2n}$ $\quad x = (q_i, p_i)$ $i = 1, \ldots, n$ $\quad \langle x_1, x_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} (q_{1i} p_{2i} - q_{2i} p_{1i})$

$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}, -\frac{\partial f}{\partial q_i} \right)$ ya que.

$$\langle \operatorname{grad} f, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} p_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} q_i \right) = Df \cdot x$$

Si $\operatorname{grad} f = X$ y $\dot{x} = X$

$$\frac{df}{dt}[x(t)] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right] = 0.$$

NEWTON Y EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS

1- INTRODUCCIÓN

Tema: una síntesis de la Mecánica Clásica.

Mecánica: la descripción del movimiento de los cuerpos.

Observaciones: una descripción objetiva.

los cuerpos son los sujetos de estudio (¿cómo se mueven?)

Enfoque: lo que sabemos ahora. Reinventar el pasado aprovechando la experiencia heredada.

2- EL MARCO DE REFERENCIA

El escenario es el espacio euclidiano de dimensión 3. El de la geometría ordinaria en el que hay puntos y curvas; en el vale el Teorema de Pitágoras. Su construcción se hace en relación a la descripción del movimiento.

El movimiento se describe respecto a un sistema inercial primario.

Los actores son los cuerpos materiales. Se representan por modelos construidos también en relación al movimiento, por ejemplo, como partículas, cuerpos rígidos o deformables, fluidos o en general como sistemas mecánicos. Su característica esencial es la masa.

3- LAS LEYES DEL MOVIMIENTO

Estas son las de Newton.

1ª: Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme a menos de que una fuerza actúe sobre él.

2ª El cambio del movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa al cuerpo y se efectúa según la dirección de dicha fuerza.

La primera es la ley de la inercia y parece dependiente de la segunda.

La versión contemporánea es:

1ª: Existe el movimiento natural.

2ª: $\vec{F} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ (m es la masa inercial).

4- LAS FUERZAS

Son las responsables del movimiento y de la arquitectura del universo. Algunas representan el conocimiento fenomenológico y otras el básico. De las primeras recordamos la fricción y la derivada de la "ley de Hooke". En las segundas destaca la "Ley de la Gravitación universal":

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

en la que $G = 6.67 \times 10^{-11}$ newt-m^2/kg^2 y m es la masa gravitacional

La ley de la acción y la reacción (3ª ley de Newton) describe únicamente una propiedad de algunas fuerzas.

5- ALGUNOS EJEMPLOS DE MOVIMIENTO.

El péndulo (esférico). El movimiento de los planetas.

Las leyes de Kepler:

1ª Los planetas giran alrededor del Sol describiendo elipses. El Sol ocupa uno de sus focos.

2ª El radio vector de un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

3ª Los cuadrados de los períodos de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas.

6- LA DESCRIPCIÓN CLASICA DEL MOVIMIENTO.

El Principio de la Relatividad: La descripción de las leyes de la naturaleza es la misma para todos los observadores inerciales.

El movimiento visto desde un sistema rotatorio. El péndulo de Foucault gira al oeste. La caída libre desde muy lejos se desvía ~~hacia~~ (horizontal) hacia el sureste. Un proyectil se deflecta a la derecha de su movimiento (todo esto en el hemisferio norte)

La descripción del movimiento es una descripción geométrica.

MECÁNICA CLÁSICA Y GEOMETRÍA

Descripción de un sistema mecánico.

Consideremos un sistema mecánico con restricciones holónomas. Supongamos que es de n grados de libertad. Lo representaremos por una variedad diferenciable M de dimensión n, su "espacio de configuración".

Construyamos los haces tangente $T_{\circ}M$ y cotangente $T^{\circ}M$ y consideremos sus proyecciones correspondientes: $\pi_{\circ}: T_{\circ}M \to M$ y $\pi^{\circ}: T^{\circ}M \to M$ definidas por: $(a,u) \mapsto a$ y $(a,u^*) \mapsto a$

Las ecuaciones de movimiento.

Para escribir las ecuaciones de Newton en el marco antes descrito habrá que considerar la energía cinética, que en coordenadas locales (generalizadas) puede escribir como:

$$K = \sum_{j,k} a_{jk}\, \dot{q}_j \dot{q}_k$$

donde

$$a_{jk} = a_{jk}(q_i)$$

y, suponiendo fuerzas derivables de un potencial $V = V(q_i)$, se puede construir la Lagrangiana $L = T - V$ que es una función:

$$L: T_{\circ}M \to R$$

Con ésta pueden construirse las ecuaciones de Lagrange, que en coordenadas son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad i = 1, \dots, n.$$

Las trayectorias $q^i = q^i(t)$ que satisfacen estas ecuaciones son los extremos de un problema variacional planteado por el Principio de Hamilton.

La transformación de Legendre.

Consideremos la restricción de L a cada espacio tangente $L|T_aM$ y definamos

$$\mathcal{L}_L : T_{\circ}M \to T^{\circ}M$$

mediante: $\quad (a,u) \mapsto (a,\ d_u(L|T_aM))$

Como las trayectorias $h: R \to M$ determinan un vector tangente $\tau_{h(t)}h$, el mapeo $t \mapsto (h(t), \tau_{h(t)}h)$ "levanta" la trayectoria h a la trayectoria $\tilde{h}: R \to T_{\circ}M$. Con esto y la transformación $\mathcal{L}_L$ podemos formular la mecánica en el haz cotangente.

Las ecuaciones de Hamilton

La transformación de Legendre, en coordenadas locales,

$$H = \sum_{i=1}^{n} v^i p_i - L \qquad \text{(A)}$$

permite determinar las ecuaciones que determinan las trayectorias $\tilde{h}$ en $T^{\circ}M$. Estas están dadas por las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \qquad i = 1, \dots, n$$

Estas están determinadas por la forma diferencial dH (campo covectorial).

La fórmula (A) sugiere la expresión:

$$\theta = \sum p_i\, dq^i$$

como forma 1 fundamental. Esta es un invariante del haz cotangente. Da lugar, mediante la derivación exterior a la forma 2

$$\omega = \sum dp_i \wedge dq^i, \qquad \text{(B)}$$

que es cerrada y de rango máximo, que define la estructura simpléctica de $T^{\circ}M$. Las ecuaciones de Hamilton describen el flujo en $T^{\circ}M$ determinado por el campo vectorial correspondiente a dH.

Transformaciones canónicas

Estas son las que conservan la forma 2 fundamental (B). Se puede probar que el flujo en $T^{\circ}M$ es una transformación canónica.

El estudio de las transformaciones canónicas puede realizarse introduciendo la noción de "función generatriz".

La ecuación de Hamilton-Jacobi

Dada la Hamiltoniana $H: T^{\circ}M \to R$, toda cantidad $S: M \to R$ determina una forma 1 $dS: M \to T^{\circ}M$ con la que se puede establecer la ecuación

$$H \circ dS = 0$$

en M. Esta es la ec. de Hamilton-Jacobi, que en coordenadas locales se escribe como (dS es el mapeo $a \mapsto (a, d_aS)$):

$$H\left(q^1, \ldots, q^n, \frac{\partial S}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q^n}\right) = 0, \qquad (c)$$

Esta es una ecuación diferencial parcial de 1er orden en S. Las trayectorias en T^*M resultan ser las características de esta ec. diferencial y se puede probar que si S es una solución de (c), las trayectorias $h: R \to M$ pueden levantarse para tener las $\tilde{h} = dS \circ h : R \to T^*M$ y, recíprocamente, si S es una función en M que levanta las trayectorias a T^*M, satisface la ecs (c).

<u>El invariante de Poincaré-Cartan</u>

Se puede construir el espacio físico extendido o espacio de evolución $T^*M \times R$ y definir su geometría a partir de la forma

$$\sigma = \sum_i p_i \, dq^i - H \, dt$$

Se prueba que las "líneas" derivadas de esta forma tienen una proyección sobre el eje t dada por las funciones $p_i = p_i(t)$, $q^i = q^i(t)$ que satisfacen las ecs de Hamilton. El flujo físico preserva la integral de $\sum_i p_i \, dq^i$ en curvas cerradas y hace a $\sum_i dp_i \wedge dq^i$ un invariante integral absoluto.

Definiendo la acción como:

$$S = S(q^i, t) = \int_\gamma L \, dt$$

donde γ es la curva extremal (trayectoria) que conecta (q_0, t_0) con (q, t), se puede probar que $dS = \sigma$

y que esa función satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0.$$

$M = SO(3)$ $\quad A \in M$. $\quad (AA^T = 1, \det A = 1)$

$TM = SO(3) \times R^3$ $\quad (A, \underline{\omega}) \in TM$. $\quad$ ($\underline{\omega}$ = vel angular)

Energía cinética: $2h = \underline{\omega} D \underline{\omega}^T$

Impulso angular: $\underline{c} = \underline{\omega} D A^T$.

($\underline{c} = \sum_i m \, \underline{x}_i \times \underline{\dot{x}}_i$, $\quad \underline{\dot{x}}_i = \underline{\omega} \times \underline{x}_i$ y calculando $\underline{c}A$).

Ecs. de Euler: $\quad \underline{\dot{\omega}} = (\underline{\omega} D \times \underline{\omega}) D^{-1}$

Usando la constancia de h y $\underline{c}$ el problema se reduce a <u>dos</u> dimensiones y es integrable.

<u>Polodias: $\underline{c} \cdot \underline{c} = c^2 = \omega D^2 \omega^T$ $(h = 1)$.</u>

TS^2 se construye con $\underline{a}, \underline{v} \in R^3$ tales que: $|\underline{a}| = 1$ y $\underline{a} \cdot \underline{v} = 0$. Las geodésicas son:

$$\underline{\dot{a}} = \underline{v}, \quad \underline{\dot{v}} = -|\underline{v}| \underline{a}$$

$h = \frac{1}{2}|v|^2$ y $\underline{c} = \underline{a} \times \underline{v}$ son 1eras integrales.

$\underline{c}$ = fijo equivale a $\underline{a}$ contenido en el plano ortogonal a $\underline{c}$ que pasa por el origen (círculo máximo!) $h = 1$ implica $|\underline{v}| = \sqrt{2}$

$\therefore I_{1\underline{c}}$ describe geodésicas de rapidez $\sqrt{2}$ en TS^2.

~~$v \cdot v$~~ $\quad \Omega(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{v} \cdot \underline{w} = \tilde{\Omega}(\underline{v})(\underline{w}) = \underline{c} A \underline{w} =$

$\underline{N} = \underline{\dot{L}} = D\underline{\dot{\omega}} =$ $\qquad \underline{\dot{\omega}} = \underline{\omega} \times \underline{\omega}$

$\underline{\omega} D$

1- Considere un cuerpo de masa m_1 atado a otro de masa m_2 con una cuerda de longitud l. El primero está colocado sobre una superficie horizontal y puede moverse libremente en ella mientras que el segundo cuelga por debajo de la superficie ya que la cuerda pasa por un agujero hecho en ésta. Suponiendo que la cuerda es flexible, inextensible y sin peso y que el cuerpo colgante sólo se mueve en la dirección vertical, encuentre la Lagrangiana del sistema.

2- Considere al péndulo esférico como un cuerpo rígido que rota sobre un punto fijo. Describa brevemente cómo resolvería el problema del movimiento de ese sistema desde este punto de vista.

3- El Teorema de Liouville asegura que el movimiento de un sistema mecánico conserva el volumen del espacio fásico. Describa a grandes rasgos cómo probaría Ud este teorema.

4- Haga un breve comentario acerca de algún punto de la Mecánica Clásica que le parezca interesante.