



Archivo
Luis Estrada


UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

SISTEMAS DINÁMICOS EN UN ESPACIO EUCLIDIANO.

Def: Una transformación $\pi: E \times \mathbb{R} \rightarrow E$ define un sistema dinámico (E, \mathbb{R}, π) o fluido continuo \mathcal{F} sobre E si satisface las siguientes propiedades:

- i) $\pi(x, 0) = x \quad \forall x \in E$.
- ii) $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t+s) \quad \forall x \in E \text{ y } \forall t, s \in \mathbb{R}$.
- iii) π es continua.

Para todo $x \in E$, π induce un mapa, ^{inyectivo}continuo $\pi_x: \mathbb{R} \rightarrow E$ tal que $\pi_x(t) = \pi(x, t)$. π_x se llama el movimiento por x .

Para todo $t \in \mathbb{R}$ el mapa π induce un mapa continuo $\pi^t: E \rightarrow E$ tal que $\pi^t(x) = \pi(x, t)$. El mapa π^t se llamará la transición o acción de t .

Teor. El mapa π^{-t} definido por

$$\pi^{-t}(x) = \pi(x, -t)$$

es el inverso de π^t .

Teor. El mapa π^t es una transformación topológica de E sobre sí mismo.

Como consecuencia, el sist. dinámico \mathcal{F} es un grupo uniparamétrico de transf. topológicas, esto es, para cada valor de $t \in \mathbb{R}$ queda definida una transf. topológica y π^t forma un grupo, esto es, $\{\pi^t\}, t \in \mathbb{R}$ es un grupo con la operación

$$\pi^t \pi^s = \pi^{t+s}.$$

Además es conmutativo.

Notación: x_t significa $\pi(x, t)$
en MCE y SCR.

$$MS \triangleq \{xt : x \in M, t \in S\}$$

Si $M \circ S$ son solitarios, escribiremos XS ó Mt .

En general: Un sistema dinámico es la terna (T, G, π) donde T es un espacio topológico, G un grupo topológico y π es un mapa que satisface los axiomas i), ii) y iii). Llamados axiomas de identidad, losurjunto y continuidad, respectivamente.

Def. Para $x \in E$ fijo y $a \leq b \in R$, el segmento de trayectoria es el conj.

$$x[a, b] = \{xt : t \in [a, b]\}$$

Def. Para $x \in E$ fijo, la trayectoria o órbita por x es el conjunto:

$$xR = \{xt : t \in R\}.$$

Los conjuntos xR^+ y xR^- se llaman las semi-trayectorias positiva y negativa por x respectivamente.

SIST. DINÁMICOS

$$x \in R^n \quad f : R^u \rightarrow R^u.$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (\text{def. un campo vectorial}).$$

$$x : R \rightarrow R^n \quad (\text{sólido}).$$

Se exige: X tiene como dominio R .
(no es vacío).

Toda función define un difeomorfismo:

$$\varphi_t : R^u \rightarrow R^u$$

$$\text{definida por: } \varphi_t(x_0) = x(t; x_0)$$

En general se tiene: (X, R, φ) .

$$\text{en } \varphi : X \times R \rightarrow X$$

Es exigido: X una variedad diferenciable.

R un grupo de Lie

φ cada acción es un difeomorfismo.

Conjunto de grupos,

se define el flujo (por razones obvias). Dada acción de R en X .

Si se toma Z (el grupo de los émbolos en la top.

diseño) y M una variedad.

se hace un flujo discreto. $\varphi_n : M \rightarrow M$.

(def. por cada n). Importante: esto ayuda a la sol. dinámica.

- 1 -
13-II-68.

Y necesito que. (acción de grupo).)

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$$

conjunto de grupos,

de acuerdo a la top.

cambios vecinos,

esas deformaciones.

entender a la

importante: esto ayuda a la sol. dinámica.

4

Sist. dinámicos diferenciables.

Def. Un sist. din. dif. consiste de una terna M, G, φ en que:

- i) M es una var. dif. de clase C^r ($r \geq 1$)
- ii) G es un grupo de Lie commutativo.
- iii) $\varphi: M \times G \rightarrow M$ es diferenciable. φ :

$$\varphi(p, g) \equiv \varphi_g(p) \text{ satisface:}$$

$$\varphi(p, 0) = p$$

$$\varphi(p, g_1 + g_2) = \varphi(\varphi(p, g_1), g_2)$$

$$\varphi_{g_1 + g_2}(p) = \varphi_{g_2}(\varphi_{g_1}(p))$$

Note: $\varphi: (M, g) \rightarrow M$ es un difeomorfismo.

mas adelante se pondrá otra restricción:

Recalculos:

Una variedad dif. de dim n . es una var. topológica provista de una est. dif.

Varietad top. de dim n . Esp. de Hausdorff, separable en que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a una abierta de \mathbb{R}^n . Esto da un sistema local de coord. en cada punto (homeomorfismo local). Se nulan dentro las coord. de p en $x^i(p) \quad i=1, \dots, n$.

Un sist. coordenado se da por (x, U) .

Un atlas difeomorfico A en M es un conj. de vecindades coordenadas tales que:

- i) todo $p \in M$ está en alg. (x, U)
- ii) si $(x, U(x))$ y $(y, U(y))$ son dos sist. de coord. en A y $U(x) \cap U(y) \neq \emptyset$ entonces $y \circ x^{-1}$ y $x \circ y^{-1}$ son de clase C^r .

Los mapas se llaman cambios de coord.. Del Teor. de la f. inversa se sigue que los cambios son difeomorfos de O .

-2-
15-II-68.

Dos sistemas de coord. son compatibles si

- i) no se intersectan o
- ii) si se intersectan se cumple lo anterior.

Un sist. de coord. es compatible con A si es compatible con cada uno de los sistemas de coord. que lo forman.

Una est. dif. es un atlas maximal. (Unir a todos los sist. coordinados compatibles con A).

Grupos de Lie

Es una variedad diferenciable en que se ha definido una operación (+) resp. de la cual es un grupo (que suponemos abeliano) y f debe ser continua y diferenciable.

$$f: G \times G \rightarrow G \quad f(x, y) \rightarrow x+y$$

análogamente a $G \rightarrow G$.

$$\text{localmente } f(x, y) = x+y.$$

$f: M^n \rightarrow N^n$ es diferenciable en p si se pueden encontrar vecindades coord. (x, U) en p y (y, V) en $f(p)$ tales que $y \circ f \circ x^{-1}$ es dif. en $x(p)$. La dif. si lo es en todos puntos.

Dif. de óbita o trayectoria de $p \sim \varphi_t(p, g)$

$$\text{conjunto invariante: } = \{ \varphi_t(\Sigma, g), \Sigma \subset M \}$$

Conjunto invariante mínimo. Es un conj. inv. y cerrado que no contiene propiamente ningún conjunto invariante y cerrado.

Puntos atractores o de equilibrio. aquellos que coinciden con la unión de su óbita.

Óbita periódica. La óbita de p es periódica si existe $g \in G$ tal que $\varphi_g(x) = x$. En el caso es periódica la óbita de todo punto en la unión de la óbita de x (equivalente). g es el período.

Oblíg recurrente. (convergencia).

G contiene $\mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{R}$

Problemas:

- 1- Oblig en el buzo.
- 2- D. considerar el caso oblig recurrente no nula.

3- Si G no es $\mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{R}$ la tasa de crecimiento es constante.

Si G es $\mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{R}$ (flujos discretos o continuos)

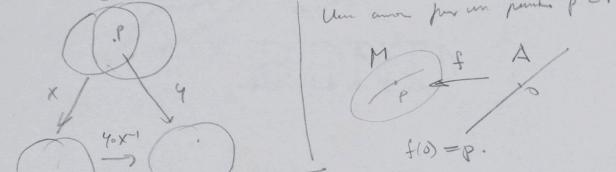
Geometría de variedades.

Vectores tangentes en un punto $p \in M^n$ se aplican $v: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ en su:

$\mathbb{Z}_p = \{ \text{sist. de coord. en dominio contenidos a } p \}$. Que cumple:

i) Si $v(x) = (x^1, \dots, x^n)$, $v(y) = (y^1, \dots, y^n)$ en x

$$v(p) = \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$



Si (x, v) es un sistema de coord., $p \in U \Rightarrow$

$x_0 f: A \rightarrow X(U) \subset \mathbb{R}^n$

El vector tangente a f en p :

$$\left. \frac{d}{dt} (x_0 f)(t) \right|_{t=0} = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

En vez de dar un solo sistema de coord.

$$(u+v)(x) = u(x) + v(x)$$

$$(xu)(x) = u(x)$$

Planteamos M_p el esp. tang. a M en p .

A $x = (x^1, \dots, x^n)$ le corresponde los vectores tangentes.

$$\frac{\partial}{\partial x^i}: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{R}^n, i=1, \dots, n$$

$$\exists. y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{Z}_p, \frac{\partial}{\partial x^i}(y) = \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^i}, \dots, \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \right) \text{ son vect. tangentes.}$$

-4-

22-II-68

Nótese que:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(x) = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0).$$

$$\therefore v(x) = (x^1, \dots, x^n) = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$$

Se le llama la base canónica respecto a X .

Mapa isomórfico R^n .

Sea D el conj. de funciones diferenciables ($C^r(\mathbb{R}^n)$) en dominio abierto de M $\ni p$.

Definición de f a la función $v \in M_p$. $v = (v^1, \dots, v^n)$

$$v(f) = v^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \dots + v^n \frac{\partial f}{\partial x^n}$$

Hay tangente a una variedad M^n .

$$T(M) = \{ (p, v) \mid p \in M, v \in M_p \}$$

Se le da una est. diferencial de lo siguiente.

Sobre $T(M)$ tiene definición de coordenadas de M .

Se usa la proyección

$$\pi: T(M) \rightarrow M \quad \pi(p, v) = p.$$

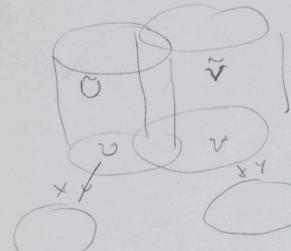
(π es un proyección que cumple $\pi^2 = \pi$)

En verdaderas coord. de $T(M)$ resaltan los

$$\text{conjunto: } \tilde{U} = \pi^{-1}(U)$$

Definición: $\tilde{U} \ni \tilde{v}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ como $\tilde{v}(p, v) = (x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$

$$\text{donde } v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n}$$

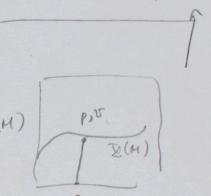


$$(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$$

$$(q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n)$$

Como que:

$$\begin{cases} v^i = v^i(x^1, \dots, x^n) \\ p^j = \sum_k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} x^k \end{cases}$$



son diferenciables: usamos jacobiano!

Notar que se pierde una dimensión (si M es C^r , al hay tangente en C^{r-1}).

¿Cuál es el Jacobiano del cambio de coord? Ver que es Δ , y por tanto $T(M)$ es orientable.

(Una ex. diferencial) Un campo vectorial \tilde{X} sobre M es un mapeo diferenciable $\tilde{X}: M \rightarrow T(M)$ tal que $\pi \circ \tilde{X} = \text{id}_M$ (en M). Se le llama también una rectificación sobre M .

$$\mathbb{R}^n \quad \dot{x} = \underline{\varphi}(x)$$

Continuidad de $\underline{\varphi}(t, t_0, x_0)$ respecto a (t_0, x_0) .

$$\underline{\varphi}(t, x_0, t_0) = x_0 + \int_{t_0}^t \underline{\varphi}(z, x_0, t_0) dz$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |(x_0, t_0) - (x'_0, t'_0)| < \delta \Rightarrow |\underline{\varphi}(t, x_0, t_0) - \underline{\varphi}(t, x'_0, t'_0)| < \varepsilon.$$

Por la continuidad de Gronwall

$$|\underline{\varphi}(t, x_0, t_0) - \underline{\varphi}(t, x'_0, t_0)| \leq |x_0 - x'_0| + \int_{t_0}^t |\underline{\varphi}(z, t_0, x_0) - \underline{\varphi}(z, t_0, x'_0)| dz + \\ + \int_{t_0}^t |\underline{\varphi}(z, t'_0, x'_0)| dz \leq |x_0 - x'_0| + k|t_0 - t'_0| + \int_{t_0}^t |\underline{\varphi}(z, t_0, x_0) - \underline{\varphi}(z, t_0, x'_0)| dz \\ \leq \{|x_0 - x'_0| + k|t_0 - t'_0|\} e^{L(t-t_0)}$$

Lema de Gronwall:

$$|\underline{\varphi}(t)| \leq A + \int_{t_0}^{t_1} [L|\underline{\varphi}(z)| + M] dz \Rightarrow |\underline{\varphi}(t_1)| \leq [A + M(t_1 - t_0)] e^{L(t_1 - t_0)}$$

$$\text{en donde } A \geq 0, L \geq 0, M \geq 0 \quad (\forall t > t_0)$$

Rfs. Coble, Hamilton & Levinson.
Hantman
Lefschetz
Pontryagin

\rightarrow Tonsgrenhier

Ecs diferenciales ordinarias.

Lema: $f(t, x) \in C^0[(a, b) \times \Omega]$, Ω conexo abierto.

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x^k} \in C^0 \Rightarrow \exists f_k(t, x_1, x_2), k=1, 2, \dots, n$$

$$\text{continua en } (a, b) \times \Omega \times \Omega \Rightarrow f_k(t, x_1, x_2) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x^k}$$

$$\text{y en } \Omega \rightarrow f(t, y_2) - f(t, y_1) = \sum_{k=1}^n f_k(t, x_1, x_2)(x_2^k - x_1^k).$$

$$f_k(t, x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{\partial f(t+s y_2 + (1-s)y_1)}{\partial x^k} ds.$$

$$\text{Teor } x = \underline{\varphi}(t, t_0, x_0) \in C^r$$

5 de marzo de 1968
Munoz + -6-

Retrato fase:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{f es Lipschitz: } |f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \quad \text{ct.}$$

$$\text{Sol: } x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

(como se ven) (Flujos en Kinos).

Retrato fase: conjunto de trayectorias en el espacio.

Dos retratos fases en equivalentes si hay un homeomorfismo que mapee trayectorias en trayectorias.

Propiedad

Establecimiento de diagramas.

Sistema Hamiltoniano.

$$p = (p_1, \dots, p_n)$$

$$q = (q_1, \dots, q_n)$$

$$H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (1)$$

$$q = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (2)$$

1^{as} integrales: Una funci \ddot{o} n $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: $F(x(t)) = \text{constante}$.

(1) es integrable en el sistema de 1^{as} integrales independientes en variables.

orden: ∇F_i no tienen componentes independientes entre si. $\nabla F_i \cdot \nabla F_j = 0$

P. de Poisson. (cuadriculacion)

Se demuestra que si un sistema es integrable se tiene un ideal del

retrato fase.

Guitarra la "cosa rara"

y el nido (mujer)

Si tienen giro de los

componentes de direcciones.

Se tienen:

$(T^n \times I^n \cap \mathbb{R}^n) \subset$ abiertos.

anisotropos.